Bac Spé Maths 2023
Voici la correction complète
de l'épreuve 2
pour Centres Etrangers Europe Liban
Mercredi 22 Mars 2023

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

Partie A

1) La tangente a une ordonnée à l'origine égale à 2 et son coefficient est égal à $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5/4 - 1/2}{1-0} = \frac{3}{4}$

$\rightarrow$ on obtient $\boxed{y = \frac{3}{4}x + 2}$

2) f semble convexe sur $]-\infty ; 0]$ et concave sur $[0 ; +\infty[$

Partie B

1) on peut utiliser la formule $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

et on a $f'(x) = \frac{-(-3e^{-3x})}{(1+e^{-3x})^2} = \frac{3e^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2}$

2) on sait que $e^{-3x} > 0$ pour tout x

et on a aussi $(1+e^{-3x})^2 > 0$ pour tout x

Donc on a $f'(x) > 0$ pour tout x

Donc f est bien croissante sur $\mathbb{R}$.

3) a) en $+\infty$, $-3x$ tend vers $-\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-3x} = 0$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{1+0} = \boxed{1}$

b) en $-\infty$, $-3x$ tend vers $+\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-3x} = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \boxed{0}$ (du type $\frac{1}{+\infty}$)

4) on résout $f(x) = 0{,}99$

soit $\frac{1}{1+e^{-3x}} = 0{,}99 \rightarrow 1 + e^{-3x} = \frac{1}{0{,}99}$

$\rightarrow e^{-3x} = \frac{1}{0{,}99} - 1$

$\rightarrow -3x = \ln\left(\frac{1}{0{,}99} - 1\right)$

et on obtient $x = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{0{,}99} - 1\right)$

soit $x = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{99}\right) = \boxed{\frac{\ln(99)}{3}}$

Partie C

1) on aura $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

avec $f(0) = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

et $f'(0) = \frac{3e^0}{(1+e^0)^2} = \frac{3\times 1}{(1+1)^2} = \frac{3}{4}$

→ on obtient $\boxed{y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}}$

2) $e^{-3x} > 0$ et $(1+e^{-3x}) > 0$ pour tout x

Donc on étudie le signe de $e^{-3x} - 1$!

→ on résout $e^{-3x} - 1 = 0$ → $e^{-3x} = 1$ → $-3x = 0$ → $\boxed{x = 0}$

→ on obtient le tableau

c'est le signe de $e^{-3x} - 1$ obtenu avec des valeurs tests →

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		convexe		concave	

3) a) f est donc convexe sur $]-\infty ; 0]$

b) Le point A d'abscisse 0 représente alors un point d'inflexion pour $\mathcal{C}_f$.

4) La tangente T est sur le point d'inflexion

Donc elle "traverse" la courbe en ce point A.

Donc la tangente sera en dessous de la courbe sur $]-\infty ; 0]$ (c'est la partie convexe) et elle sera au dessus de la courbe sur $[0 ; +\infty[$ (c'est la partie concave).

Exercice 2

Partie A

1) avec ln, il faut ici que $1+x>0$ soit $x>-1$

Donc $D_f =]-1;+\infty[$

2) on a $f(x) = x - \ln(1+x)$

$\rightarrow f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1+x-1}{1+x} = \boxed{\dfrac{x}{1+x}}$

3) a) on obtient le tableau suivant

x	-1		0		$+\infty$
x	‖	$-$	0	$+$	
$1+x$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘		↗	

$f(0) = 0 - \ln(1+0) = 0 - \underbrace{\ln 1}_{(=0)} = \boxed{0}$

b) Avec le tableau de variations,
et puisque le minimum $f(0)$ est égal à 0,
on obtient $\boxed{f(x) \geq 0}$ sur $]-1;+\infty[$.

4) a) on a $\ln\left(\dfrac{e^x}{1+x}\right) = \ln(e^x) - \ln(1+x)$

$= x - \ln(1+x) = f(x)$

b) en $+\infty$, avec les croissances comparées,

on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{1+x} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{e^x}{1+x}\right) = +\infty \rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$

Partie B

1) on a $U_1 = U_0 - \ln(1+U_0)$

$= 10 - \ln(11) \approx \boxed{7,602}$

2) on a $U_{n+1} = f(U_n)$ d'où le lien avec la partie A.

Init on a $U_0 = 10$ Donc on a bien $U_0 \geq 0$ $\boxed{OK}$

Hérédité on suppose $U_n \geq 0$

on obtient $f(U_n) \geq f(0)$

soit $U_{n+1} \geq 0$ $\boxed{OK}$

la fonction f est croissante sur les valeurs positives → elle conserve l'ordre !

3) on calcule $U_{n+1} - U_n$

$= U_n - \ln(1+U_n) - U_n = -\ln(1+U_n)$

or $U_n \geq 0$ Donc $1+U_n \geq 1$ et $\ln(1+U_n) \geq 0$

Donc on obtient $U_{n+1} - U_n = -\underbrace{\ln(1+U_n)}_{\boxed{F}} \leq 0$

Donc la suite (U_n) est décroissante.

4) La suite (U_n) est décroissante et minorée (par 0)

Donc la suite est convergente.

5) La fonction est dérivable.

Elle est donc continue et la limite ℓ de la suite (U_n) vérifiera $\boxed{\ell = f(\ell)}$

soit $\ell = \ell - \ln(1+\ell)$

soit $\ln(1+\ell) = 0$

$\rightarrow 1+\ell = e^0 = 1$

et on obtient $\boxed{\ell = 0}$

Exercice 3

1) Montrons que $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires.

On a $\vec{AB}\begin{pmatrix}2-3\\1-0\\2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}-2-3\\-5-0\\1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-5\\0\end{pmatrix}$

→ il n'y a pas proportionnalité des coordonnées
$(-5:(-1)=5$ et $-5:1=-5)$

Donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires

Donc A, B et C ne sont pas alignés.

2) On peut se contenter ici de montrer $\vec{AB}\perp\vec{AC}$
en montrant $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=0$

On a $\vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\vec{AC}\begin{pmatrix}-5\\-5\\0\end{pmatrix}=(-1)\times(-5)+1\times(-5)+1\times 0=\boxed{0}$

3) On vérifie l'équation du plan avec chaque point !

→ point A : $-3+0-2\times 1+5=0$ $\boxed{OK}$

point B : $-2+1-2\times 2+5=0$ $\boxed{OK}$

point C : $-(-2)+(-5)-2\times 1+5=0$ $\boxed{OK}$

4) L'équation cartésienne de (ABC) nous donne
un vecteur normal $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$,
qui sera un vecteur directeur de (Δ).

On obtient (Δ) : $\begin{cases} x=1+k\times(-1)=1-k \\ y=-2+k\times 1=-2+k \\ z=4+k\times(-2)=4-2k \end{cases}$

point S vecteur directeur

5) On "met" l'équation de la droite dans l'équation
du plan → $-(1-k)+(-2+k)-2\times(4-2k)+5=0$

soit $-1+k-2+k-8+4k+5=0$

soit $6k-6=0$ → $k=1$

on obtient le point H $\begin{cases} x=1-1=\boxed{0} \\ y=-2+1=\boxed{-1} \\ z=4-2\times 1=\boxed{2} \end{cases}$

6) on calcule $SH = \sqrt{(0-1)^2+(-1-(-2))^2+(2-4)^2}$

et on obtient $\boxed{SH = \sqrt{6}}$

7) on se rappelle : Aire Disque $= \pi \times R^2$

→ ici, le rayon R du disque correspond à HB

→ on calcule $HB = \sqrt{(2-0)^2+(1-(-1))^2+(2-2)^2}$

soit $HB = \sqrt{8}$

et on obtient Aire du Disque $= \pi \times (\sqrt{8})^2 = \boxed{8\pi}$

8) Volume du cône $= \frac{1}{3} \times$ Aire Base $\times$ Hauteur du cône

c'est le disque D

c'est SH

→ on obtient $\frac{1}{3} \times 8\pi \times \sqrt{6} = \boxed{\frac{8\sqrt{6}}{3}\pi}$

$\boxed{\text{Exercice 4}}$ c'est le QCM !

Les réponses sont : 1 → $\boxed{B}$
2 → $\boxed{B}$
3 → $\boxed{C}$
4 → $\boxed{A}$
5 → $\boxed{A}$

Voici quelques explications même si ce n'est pas demandé.

pour les questions 1 → 3, on a une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 4\% = 0{,}04$.

<u>Question 1</u> : on cherche $p(X \geq 1)$
$= 1 - p(X=0) \approx 0{,}870 \rightarrow \boxed{B}$

<u>Question 2</u> : X peut prendre les valeurs 4 ; 5 ; 6 et 7
et cela correspond à $P(X \leq 7) - P(X \leq 3) \rightarrow \boxed{B}$

de 0 à 7 — et on enlève — de 0 à 3

<u>Question 3</u> : on veut $p(X \leq k) \geq 0{,}95$
La condition est réalisée pour $k = 4$ et $k = 5$
Donc le plus petit possible est 4 → $\boxed{C}$

<u>Question 4</u> on cherche $P(X=n) = \underbrace{\binom{n}{n}}_{(=1)} p^n \underbrace{(1-p)^{n-n}}_{=1}$
$\rightarrow p(X=n) = 0{,}04^n \rightarrow \boxed{A}$

<u>Question 5</u> Avec la condition while .... < ...,
on cherche forcément le plus <u>petit</u> nombre.

(A) $1 - 0{,}96^n$ est l'évènement contraire de l'évènement "tirer aucune pièce défectueuse"
→ cela correspond à "au moins une pièce défectueuse" → $P(X \geq 1)$
$= 1 - P(X=0)$
$= 1 - 0{,}96^n \rightarrow \boxed{A}$