

Bac Spé Maths 2023
Voici la correction complète
de l'épreuve 1
pour Centres Etrangers Europe Liban
Mardi 21 Mars 2023

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

Partie A

1 en 0^+ , x^2 tend vers 0 donc $\ln x^2$ tend vers $-\infty$
et donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$

en $+\infty$, x^2 tend vers $+\infty$ donc $\ln x^2$ tend vers $+\infty$
et, par somme, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

2 pour $\ln(x^2)$, on applique $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
et on a $g'(x) = \frac{2x}{x^2} + 1 = \frac{2}{x} + 1 = \frac{2+x}{x}$

$$\rightarrow \text{on obtient :}$$

x	0	$+\infty$
$2+x$	+	
x	+	
$g'(x)$	+	
$g(x)$		$+\infty$

2+x est positif
 sur $]0; +\infty[$

3 a) La fonction g est continue et croissante sur $]0; +\infty[$
et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$ \Rightarrow on a $0 \in]-\infty; +\infty[$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et, en appliquant le corollaire
du TVI, on sait que l'équation
 $g(x) = 0$ admet une unique
solution sur $]0; +\infty[$

b) Avec la calculatrice, on obtient :

$$1,37 < \alpha < 1,38$$

4 on intègre α dans le tableau de variations

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \alpha & +\infty \\ \hline g(x) & -\infty & 0 & +\infty \end{array}$$

et on en déduit le tableau
de signes

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \alpha & +\infty \\ \hline g(x) & - & 0 & + \end{array}$$

Partie B

[2] a) ce n'est pas une forme indéterminée

$$\rightarrow \text{on a une limite du type } -\frac{2x-2}{0^+} \rightarrow +\frac{\infty}{0^+} \rightarrow +\infty$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

b) la courbe E_f admet une asymptote verticale ($x=0$)

[2] ici, c'est une forme indéterminée \rightarrow on factorise

$$\frac{(x-2)}{x} \ln x = \frac{(1-\frac{2}{x}) \ln x}{\frac{x}{x}} = (1-\frac{2}{x}) \ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \cdot +\infty$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

[3] il y a plein de stratégies possibles ici

$$\rightarrow \text{je vais utiliser } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

avec $u(x) = (x-2) \ln x$ et $v(x) = x$

avec la
formule
du produit $\rightarrow u'(x) = 1 \cdot \ln x + (x-2) \frac{1}{x}$ $v'(x) = 1$
 $= \ln x + \frac{x-2}{x}$

On obtient: $f'(x) = \frac{(ln x + \frac{x-2}{x}) \cdot x - (x-2) \ln x \cdot 1}{x^2}$

$$\text{soit } f'(x) = \frac{x \ln x + x - 2 - x \ln x + 2 \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

$2 \ln x = \ln x^2 !!$

[4] le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$
et d'après la partie A, on obtient

x	0	α	$+\infty$
$\text{signe de } f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

Partie C on calcule $f(x) - \ln x$

$$= \frac{x-2}{x} \ln x - \ln x$$

$$= \frac{(x-2) \ln x - x \ln x}{x} = -\frac{2 \ln x}{x}$$

$p_{\text{ax}}x \leq 0$ pour $x \in [0; 1]$ et $p_{\text{ax}}x \geq 0$ pour $x \in [1; +\infty[$

Donc $-\frac{p_{\text{ax}}x}{x}$ sera positif sur $[0; 1]$ et négatif sur $[1; +\infty[$

Donc sur $[0; 1]$, on a $f(x) - p_{\text{ax}}x \geq 0$

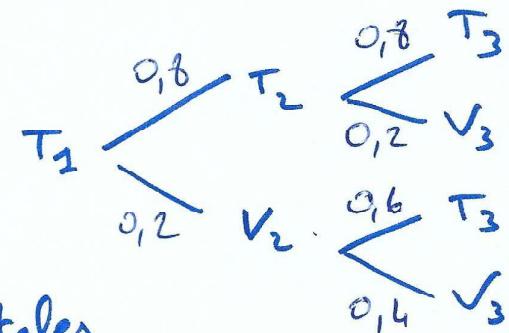
et E_f est au dessus de la courbe de p_{ax} .

et sur $[1; +\infty[$, on a $f(x) - p_{\text{ax}}x \leq 0$

et E_f est en dessous de la courbe de p_{ax} .

Exercice 2

② on a l'arbre suivant

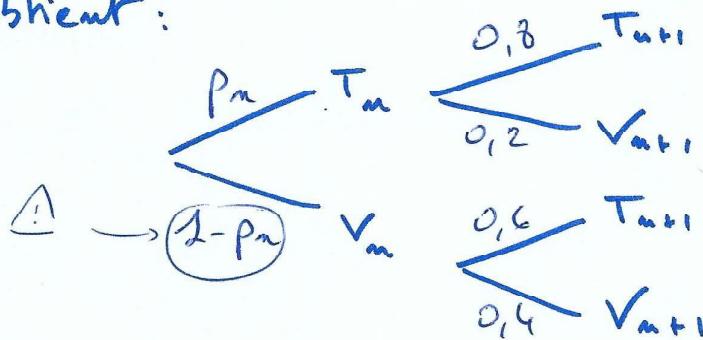


③ on calcule $p_3 = p(T_3)$
avec les probabilités totales

$$p_3 = p(T_3) = p(T_2 \cap T_3) + p(V_2 \cap T_3) \\ = 0,8 \times 0,6 + 0,2 \times 0,6 = \boxed{0,76}$$

④ on cherche $p_{V_3}(T_2) = \frac{p(V_3 \cap T_2)}{p(V_3)} = \frac{0,8 \times 0,2}{1 - 0,76} = \boxed{\frac{2}{3}}$
événement contraire de T_3

⑤ on obtient :



⑥ on calcule $p_{m+1} = p(T_{m+1})$ avec les probabilités totales

$$\rightarrow p_{m+1} = p(T_m \cap T_{m+1}) + p(V_m \cap T_{m+1}) \\ = 0,8 \times P_m + 0,6 \times (1 - P_m) \\ = \underline{0,8 P_m + 0,6 - 0,6 P_m} \\ = \boxed{0,2 P_m + 0,6}$$

6) Init on sait que $p_1 = 1$
 et on a $p_1 = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{1-1} = 1$ OK

Hérité on suppose $p_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1}$

$$\begin{aligned} \text{et on a } p_{n+1} &= 0,2p_n + 0,6 \\ &= 0,2 \times (0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1}) + 0,6 \\ &= 0,2 \times 0,75 + 0,25 \times 0,2 \times 0,2^{n-1} + 0,6 \\ &= 0,15 + 0,25 \times 0,2^n + 0,6 \\ \rightarrow p_{n+1} &= 0,75 + 0,25 \times 0,2^n \quad \boxed{\text{OK}} \end{aligned}$$

7) on a $-1 < 0,2 < 1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,2^n = 0$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,75$

et, à terme, Monsieur Durand prendra les transports en commun avec une probabilité égale à 0,75 soit 75%.

Exercice 3 c'est le QCM !

Les réponses sont :

1 → B

2 → C

3 → D

4 → B

5 → D

Voici quelques explications (même si ce n'est pas demandé) :

Question 1 : on dérive chaque $F(x)$ proposée

et avec $F(x) = (x-1)e^x$

on obtient $F'(x) = 1 \cdot e^x + (x-1)e^x$

$$= e^x(1+x-1) = e^x \cdot x = f(x)$$

→ réponse B

Question 2

il faut que $\frac{x-1}{2x+4}$ soit strictement supérieur à 0 !

→ on en fait alors le tableau de signes.

x	-∞	-2	1	+∞
$x-1$	-	+	0	+
$2x+4$	-	0	+	+
$\frac{x-1}{2x+4}$	+	-	0	+

↑ valeur interdite !

donc $S =]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$ → réponse C

Question 3 on calcule $h'(x)$ puis $h''(x)$.

$$h(x) = (x+1)e^x$$

$$\rightarrow h'(x) = 1 \cdot e^x + (x+1)e^x \\ = e^x(1+x+1) = (x+2)e^x$$

$$\rightarrow h''(x) = 1 \cdot e^x + (x+2)e^x \\ = e^x(1+x+2) = (x+3)e^x$$

→ le signe de $h''(x)$ dépend du signe de $(x+3)$
car on sait que $e^x > 0$ pour tout x

	$-\infty$	-3	$+\infty$
$h''(x)$	-	0	+
$h(x)$	concave	convexe	→ réponse (D)

Question 4

on sait que (v_n) converge et que $v_n \geq 3$.
et la seule proposition valable est la réponse (B)

La suite $v_n = 5 + \frac{(-1)^n}{n}$ ($n \geq 1$) est minorée par 3
et elle converge (vers 5) mais elle contredit les
trois autres affirmations que la réponse (B).

Question 5

w_n n'est pas géométrique car il faudrait un
réel à la place de $\frac{1}{n}$.

① on calcule $w_2 = \frac{1}{2}w_1 = 1 \times 2 = 2$

$$w_3 = \frac{1}{2}w_2 = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

$$w_4 = \frac{1}{3}w_3 = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$$

$$w_5 = \frac{1}{4}w_4 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{15}$$

② on peut alors être convaincu
que (w_n) tend vers 0 → réponse (D)

Exercise 4

② il faut que A, B et C ne soient pas alignés c'est à dire \vec{AB} et \vec{AC} non colinéaires.

$$\rightarrow \text{on a } \vec{AB} \left(\begin{array}{c} 3 - (-1) \\ -2 - (-3) \\ 6 - 2 \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 1 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \right) \text{ or } \vec{AC} \left(\begin{array}{c} 1 - (-1) \\ 2 - (-3) \\ -4 - 2 \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 5 \\ \hline -6 \\ \hline \end{array} \right)$$

→ les coordonnées ne sont pas proportionnelles
 (on a $4:2 = 2$ puis $1:5 = 0,2 !$)

→ Donc \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires

→ A, B, C ne sont pas alignés et définissent un plan.

$$\textcircled{2} \text{ a) on calcule } \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -16 \\ -9 \end{pmatrix} \cdot \vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + (-16) \cdot 1 + (-9) \cdot 4 \\ \text{et on a } \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \text{ soit } \vec{n} \perp \vec{AB}$$

on calcule $\vec{m} \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 13 \\ -16 \\ -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = 13 \times 2 + (-16) \times 5 + (-9) \times (-6)$
et on a $\vec{m} \cdot \vec{AC} = 0$ soit $\vec{m} \perp \vec{AC}$

Donc \vec{m} est \perp à 2 vecteurs (non colinéaires) de P

Bonc \vec{r} est normal au plan P.

⑤ Les coordonnées de \vec{u} seront les nombres $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ de

l'équation de P $\rightarrow 13x - 16y - 93 + d = 0$

$$\text{et } A \in \mathcal{P} \text{ donc on a } 13 \times (-1) - 16 \times (-3) - 9 \times 2 + d = -$$

$$5x_1 + 13x_2 + 4x_3 - 18 + d = 0 \rightarrow d = -17$$

on obtient donc pour P : $13x - 16y - 33 - 1t = 0$

$$\textcircled{3} \text{ sur } a \text{ de } \left\{ \begin{array}{l} x = 15 + h \times 13 = 15 + 13h \\ y = -16 + h \times (-16) = -16 - 16h \\ z = -8 + h \times (-9) = -8 - 9h \end{array} \right.$$

point F \vec{n} est un vecteur directeur de D

④ on "met" la droite dans l'équation du plan
 $\rightarrow 13(15+13k) - 16(-16-16k) - 9(-8-9k) - 17 = 0$

$$\text{soit } 195 + 169k + 256 + 256k + 72 + 81k - 17 = 0$$

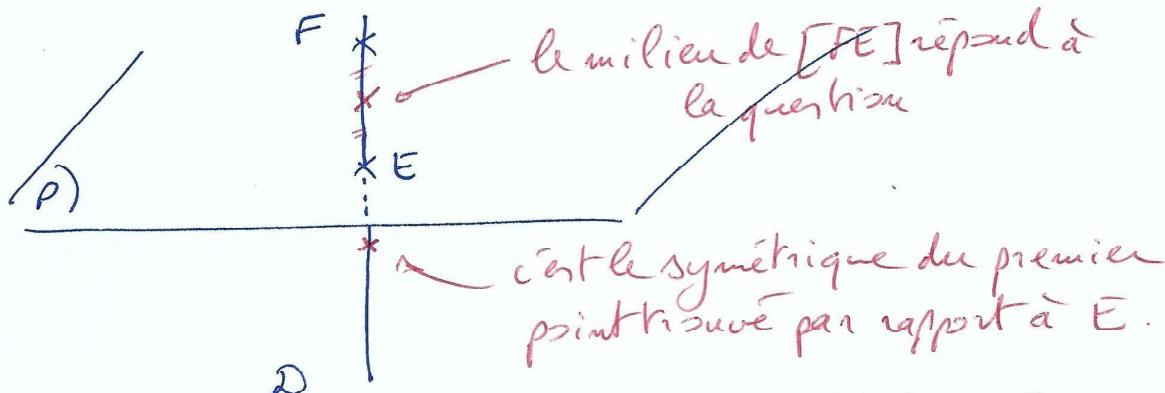
$$\text{soit } 506 + 506k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{506}{506} = -1$$

→ on obtient E $\left\{ \begin{array}{l} x = 15 + 13 \times (-1) = 2 \\ y = -16 - 16 \times (-1) = 0 \\ z = -8 - 9 \times (-1) = 1 \end{array} \right.$

⑤ la distance cherchée correspond à FE

$$\rightarrow FE = \sqrt{(15-2)^2 + (-16-0)^2 + (-8-1)^2} = \sqrt{506}$$

⑥ on va tenter un "petit" dessin



Le premier point a pour coordonnées $\left(\begin{array}{l} \frac{15+2}{2} = 8,5 \\ \frac{-16+0}{2} = -8 \\ \frac{-8+1}{2} = -3,5 \end{array} \right)$

→ on appelle R le premier point.

et il a pour coordonnées $(8,5 ; -8 ; -3,5)$

⑦ le deuxième point appelé T vérifiera le fait que E soit le milieu de [RT]

$$\text{soit } \left(\begin{array}{l} 2 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \frac{8,5+x_T}{2} \\ \frac{-8+y_T}{2} \\ \frac{-3,5+z_T}{2} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{l} 2 = 8,5 + x_T \\ 0 = -8 + y_T \\ 1 = -3,5 + z_T \end{array} \right)$$

et on obtient T $\left(\begin{array}{l} -4,5 \\ 8 \\ 5,5 \end{array} \right)$