Bac Spé Maths 2023

Voici la correction complète

de l'épreuve 1

pour Asie

Jeudi 23 Mars 2023

Correction proposée par

Bruno Swiners

sur

www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

Partie A

1) a) on a $U_1 = 0{,}9U_0 + 60 = 0{,}9 \times 400 + 60 = \boxed{420}$

et $U_2 = 0{,}9U_1 + 60 = 0{,}9 \times 420 + 60 = \boxed{438}$

b) La suite semble être $\boxed{\text{croissante}}$

2) Init on a $U_0 = 400$ et $U_1 = 420$

Donc on a bien $0 \leq U_0 \leq U_1 \leq 600$ OK

Hérédité on suppose $0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 600$

et on obtient $0 \leq 0{,}9U_n \leq 0{,}9U_{n+1} \leq 540$ en multipliant par 0,9

soit $60 \leq 0{,}9U_n + 60 \leq 0{,}9U_{n+1} + 60 \leq 600$ en ajoutant 60

et on obtient $(0 \leq)\, 60 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 600$ OK

3) a) La suite (U_n) est croissante (car $U_n \leq U_{n+1}$)

et majorée (car $U_n \leq 600$)

Donc la suite (U_n) est convergente

b) on a $U_{n+1} = 0{,}9U_n + 60$

Donc la limite l vérifiera l'équation :

$$l = 0{,}9l + 60$$

soit $l - 0{,}9l = 60 \rightarrow 0{,}1l = 60 \rightarrow l = \frac{60}{0{,}1} = \boxed{600}$

4) on obtient $\boxed{n = 7}$

(c'est le rang à partir duquel la suite dépasse 500)

Partie B

La situation proposée correspond exactement à la suite étudiée dans la partie A.

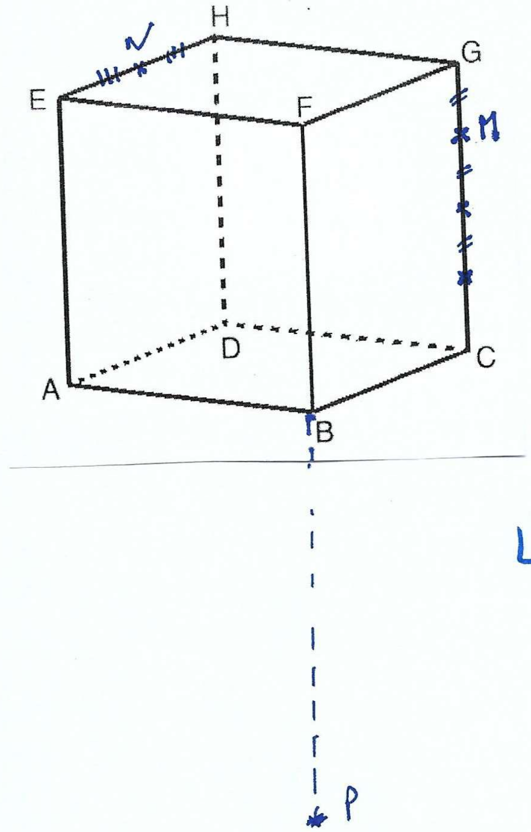
Pour rappel, si il vend 10%, cela signifie que le nombre d'arbres diminue de 10%, ce qui correspond au coefficient multiplicateur $\left(1 - \frac{10}{100}\right) = 0{,}9$!!

→ après 7 ans, on sait que le nombre d'arbres va dépasser 500 → il y aura un vrai souci !

Exercice 2

1) on a $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 0-1=-1 \\ 1/2-1=-1/2 \\ 1-3/4=1/4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix} 1-1=0 \\ 0-1=-1 \\ -5/4-3/4=-2 \end{pmatrix}$

2)



3) Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ ne sont pas colinéaires, leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles ($0:(-1)=0$ et $-1:(-1/2)=2$).
Donc M, N et P ne sont pas alignés.

4) a) On a $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{MP}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$= -1\times 0 + (-\frac{1}{2})\times(-1) + \frac{1}{4}\times(-2)$

$= \boxed{0}$

Donc on a $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{MP}$

Le triangle MNP est rectangle en M.

b) on aura donc Aire MNP $= \dfrac{MN \times MP}{2}$

avec $MN = \sqrt{(0-1)^2+(1/2-1)^2+(1-3/4)^2} = \sqrt{\frac{21}{16}} = \frac{\sqrt{21}}{4}$

$MP = \sqrt{(1-1)^2+(0-1)^2+(-\frac{5}{4}-\frac{3}{4})^2} = \sqrt{5}$

→ on obtient Aire MNP $= \dfrac{\sqrt{21}/4 \times \sqrt{5}}{2} = \boxed{\dfrac{\sqrt{105}}{8}}$

5) a) on montre que $\vec{n}$ est $\perp$ aux vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.

→ on a $\vec{n}\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} = 5\times(-1) + (-8)\times(-1/2) + 4\times 1/4 = \boxed{0}$

et $\vec{n}\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{MP}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 5\times 0 + (-8)\times(-1) + 4\times(-2) = \boxed{0}$

b) Les coordonnées de $\vec{n}$ nous donne les nombres $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ de l'équation de (MNP).

→ on obtient $5x - 8y + 4z + d = 0$

or $M \in (MNP)$ donc $5 \times \underset{\uparrow x_M}{1} - 8 \times \underset{\uparrow y_M}{1} + 4 \times \underset{\uparrow z_M}{\frac{3}{4}} + d = 0 \rightarrow d = 0$

→ on obtient pour (MNP) : $\boxed{5x - 8y + 4z = 0}$

6) un vecteur directeur de (d) sera donc $\vec{n}$

→ on obtient pour (d) $\begin{cases} x = 1 + k \times 5 = 1 + 5k \\ y = 0 + k \times (-8) = -8k \\ z = 1 + k \times 4 = 1 + 4k \end{cases}$

point F   vecteur directeur

7) Le point L est en fait le point d'intersection de la droite (d) et du plan (MNP)

→ on "met" la droite dans l'équation du plan

soit $5(1+5k) - 8(-8k) + 4(1+4k) = 0$

soit $5 + 25k + 64k + 4 + 16k = 0 \rightarrow 105k + 9 = 0 \rightarrow k = -\frac{3}{35}$

on obtient alors $L \begin{cases} x = 1 + 5 \times \left(-\frac{3}{35}\right) = \frac{20}{35} = \boxed{\frac{4}{7}} \\ y = -8 \times \left(-\frac{3}{35}\right) = \boxed{\frac{24}{35}} \\ z = 1 + 4 \times \left(-\frac{3}{35}\right) = \boxed{\frac{23}{35}} \end{cases}$

8) on calcule

$$FL = \sqrt{\left(\frac{4}{7} - 1\right)^2 + \left(\frac{24}{35} - 0\right)^2 + \left(\frac{23}{35} - 1\right)^2} = \boxed{\sqrt{\frac{27}{35}}}$$

→ pourquoi ne pas garder cette écriture $\sqrt{\frac{27}{35}}$ du résultat ?
C'est une énigme ! Mais, en tout cas, on a bien $\sqrt{\frac{27}{35}} = \frac{3\sqrt{105}}{35}$

on calcule alors $V = \frac{1}{3} \times \underbrace{\text{Aire Base}}_{\text{on prend MNP ici}} \times \underbrace{\text{Hauteur}}_{\text{la hauteur correspond alors à FL}}$

et on obtient $V = \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{\sqrt{105}}{8} \times \frac{\cancel{3}\sqrt{105}}{35} = \frac{105}{280} = \boxed{\frac{3}{8}}$

Exercice 3

1) on dira qu'il n'y a aucune solution pour $k = 1$
et deux solutions pour $k = 0{,}2$

2) a) on a $f(x) = \ln x - x$
donc $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

b) on obtient le tableau suivant

x	0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
x		$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	

$f(1) = \ln 1 - 1 = 0 - 1 = \boxed{-1}$

c) on en déduit que, pour tout $x \in]0;+\infty[$,
on a $f(x) < 0$ soit $\ln x - x < 0$
soit $\ln x < x$.
→ l'inégalité stricte nous confirme qu'il est impossible d'obtenir $\ln x = x$
→ $\boxed{\text{aucune solution}}$ pour cette équation $\ln x = x$!

3) a) Avec le tableau donné, on peut dire que :
- si $g(\frac{1}{k})$ est < 0, alors il n'y a aucune solution
- si $g(\frac{1}{k}) = 0$, alors il y a 1 solution (c'est $\frac{1}{k}$!)
- si $g(\frac{1}{k})$ est > 0, alors il y a 2 solutions
  → une entre 0 et $1/k$, l'autre en $1/k$ et $+\infty$.

b) $g(\frac{1}{k}) = \ln(\frac{1}{k}) - k \times \frac{1}{k} = -\ln k - 1$

c) Donc $g(\frac{1}{k}) > 0 \iff -\ln k - 1 > 0$
$\iff \ln k < -1$

ⓓ on veut 2 solutions → on veut $g\left(\frac{1}{k}\right) > 0$

→ donc on veut $\ln(k) < -1$

soit $e^{\ln k} < e^{-1}$

soit $\boxed{k < e^{-1}}$ ou $\boxed{k < \frac{1}{e}}$

ⓔ k doit être un nombre strictement positif

Donc :

pour $0 < k < \frac{1}{e}$, il y aura 2 solutions

pour $k = \frac{1}{e}$, il y aura 1 solution

pour $k > \frac{1}{e}$, il n'y aura pas de solutions.

Exercice 4 c'est le QCM !

Les bonnes réponses sont : 1 → B

2 → C

3 → B

4 → A

5 → C

et voici quelques explications même si elles ne sont pas demandées.

<u>Question 1</u>

on peut utiliser la formule

$$p(B \cup \text{pair}) = p(B) + p(\text{pair}) - p(B \cap \text{pair})$$

ou

il y a 4 billes bleues

il y a 7 billes paires en tout

↳ seules la 2 et la 4 sont paires et bleues

$$\rightarrow p(B \cup \text{pair}) = \frac{4}{15} + \frac{7}{15} - \frac{2}{15} = \frac{9}{15} \rightarrow \boxed{B}$$

Question 2

on se place parmi les $\boxed{10}$ boules vertes où il n'y en a qu'une avec le numéro 7 → $\frac{1}{10}$ → $\boxed{C}$

Question 3

Pour avoir $G = 5$, il faut remporter 15€ avec la mise de 10€.

Donc, avec la boule bleue numérotée 5 → $3 \times 5 = \boxed{15}$

on triple le numéro

et avec la boule verte numérotée $\boxed{15}$

soit 2 possibilités sur les 15 boules → $\frac{2}{15}$ → $\boxed{B}$

Question 4

on se place parmi la seule boule rouge, avec laquelle on aura $G = -10$ à cause de la mise

Donc $P_R(G=0) = 0$ (évènement impossible) → $\boxed{A}$

Question 5

on se place parmi les possibilités d'avoir $G = -4$, c'est à dire de gagner 6€ (avec la mise de 10€).

→ il y a $\boxed{2}$ possibilités : la bleue numérotée 2 → $2 \times 3 = 6$€

et la verte numérotée 6 → 6€

Donc parmi ces 2 billes, la probabilité de tirer une bille verte est égale à $\frac{1}{2}$ → $\boxed{C}$