Corrigé de l'épreuve de mathématiques

du Bac Spécialité Maths

Métropole juin 2021 (pour candidats libres)

Sujet 2

Correction proposée
par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1 : Les bonnes réponses à ce QCM sont :

1. $\boxed{b}$ 2. $\boxed{c}$ 3. $\boxed{d}$ 4. $\boxed{c}$

voici quelques explications (même si elles ne sont pas demandées).

Question 1 → cette question peut être vite fastidieuse. on va chercher, pour chaque point proposé, si il existe UNE valeur de t vérifiant les trois égalités → heureusement qu'ici la bonne réponse est le 2e point M_2 !!

on teste pour le point M_1

→ on cherche t tel que $\begin{cases} -4+3t=-1 \\ 6-3t=3 \\ 8-6t=-2 \end{cases} \to \begin{cases} t=1 \\ t=1 \\ t=\frac{5}{3} \end{cases}$ ⚠

représentation de D'

coordonnées de M_1

on teste le point M_2 maintenant

→ on cherche t tel que $\begin{cases} -4+3t=11 \\ 6-3t=-9 \\ 8-6t=-22 \end{cases} \to \begin{cases} t=5 \\ t=5 \\ t=5 \end{cases}$

→ c'est bon pour M_2 → réponse $\boxed{b}$

Question 2 : on nous donne la représentation paramétrique de D' et donc un vecteur directeur se lit "accroché à la lettre t".

on obtient $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ et cela correspond exactement à la réponse $\boxed{c}$

Question 3

La droite D est dirigée par $\overrightarrow{AB} \begin{vmatrix} -1-1=-2 \\ 3-1=2 \\ 2-(-2)=4 \end{vmatrix}$

La droite D' est dirigée par $\vec{u} \begin{vmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{vmatrix}$

on peut constater que $\vec{u} = -1{,}5\,\overrightarrow{AB}$ et que les vecteurs sont colinéaires.

Les réponses possibles sont donc b ou d.

Mais on peut vérifier que $B \in D'$.

En effet, si on résout $\begin{cases} -4+3t=-1 \\ 6-3t=3 \\ 8-6t=2 \end{cases}$, on obtient $\underbrace{\begin{cases} t=1 \\ t=1 \\ t=1 \end{cases}}_{\text{c'est bon !}}$

D' →   ← point B

Et deux droites "parallèles" passant par un même point sont forcément confondues → réponse $\boxed{d}$.

Question 4.

La droite D est dirigée par $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{vmatrix}$.

Un vecteur normal au plan P sera $\vec{n}\begin{vmatrix} 1 \\ m \\ -2 \end{vmatrix}$.

On veut D parallèle à P

soit $\overrightarrow{AB} \perp \vec{n}$

→ il faut que leur produit scalaire soit nul !

on obtient : $\begin{vmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ m \\ -2 \end{vmatrix} = 0$

soit $-2\times 1 + 2\times m + 4\times(-2) = 0$

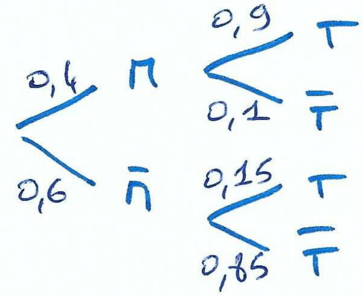
soit $-2 + 2m - 8 = 0$

soit $2m = 10 \rightarrow m = \frac{10}{2} = 5$

→ réponse $\boxed{c}$

Exercice 2

1. a On obtient l'arbre



b) on cherche $p(M \cap T) = p(M) \times p_M(T) = 0,4 \times 0,9$
$= \boxed{0,36}$

c) on cherche $p(T)$ → formule des probabilités totales

on a : $p(T) = p(M \cap T) + p(\bar{M} \cap T)$
$= 0,36 + 0,6 \times 0,15 = \boxed{0,45}$

d) on cherche $p_T(M) = \dfrac{p(M \cap T)}{p(T)} = \dfrac{0,36}{0,45} = \boxed{0,8}$

2. a) on assimile la situation à un tirage avec remise
→ épreuves indépendantes et dans les mêmes conditions avec 2 issues possibles (T ou $\bar{T}$)

on a donc une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ de paramètres $n = 20$ et $p = p(T) = 0,45$.

b) on cherche $p(X = 5)$ et on utilise binomFdp sur la calculatrice → $p(X=5) \approx 0,036$.

c) on cherche $p(X \leq 8)$ et on utilise binomFRep sur la calculatrice → $p(X \leq 8) \approx 0,414$

d) on sait que $E(X) = n \times p$ (pour une loi binomiale)
→ $E(X) = 20 \times 0,45 = 9$
→ sur un grand nombre d'échantillons, on aura en moyenne 9 chats positifs sur des échantillons de 20.

3. a on cherche $p(X \geq 1)$

et on a $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$

$$= 1 - \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0}$$

on revient à la formule de base

$\binom{n}{0} = 1$ $p^0 = 1$

on obtient $p(X \geq 1) = 1 - 1 \times 1 \times (1 - 0{,}45)^n$

soit $p(X \geq 1) = 1 - 0{,}55^n$.

b. ce programme est très classique !
Il nous donne la valeur de l'entier n à partir de laquelle la probabilité cherchée (au moins un chat soit positif) dépasse 0,99 ou 99%.

c. on peut faire "tourner" le programme si on est à l'aise avec sa calculatrice.

ou on peut résoudre $p_n \geq 0{,}99$

soit $1 - 0{,}55^n \geq 0{,}99$

ou on peut utiliser le tableau de valeurs de la calculatrice en utilisant la touche $\boxed{f(x)}$

on obtient ici la valeur 8 !!

↳ le tableau de valeurs affiche

...	...
6	0,9723
7	0,9848
$\boxed{8}$	$\boxed{0{,}9916}$
9	0,9954
...	...

Exercice 3

1. on peut voir qu'il y a un écart de 4 entre n et $\frac{4}{U_n}$

→ il semblerait que $\frac{4}{U_n} = n + 4$.

2. c'est une récurrence quasi-évidente !

$\boxed{\text{Init}}$ on a $U_0 = 1 > 0 \rightarrow \boxed{\text{OK}}$

$\boxed{\text{Hérédité}}$ on suppose $U_n > 0 \rightarrow 4U_n > 0$

on aura donc $U_n + 4 > 4 > 0$

et donc $\frac{4U_n}{U_n+4} > 0$ (quotient de 2 positifs !)

soit $U_{n+1} > 0 \rightarrow \boxed{\text{OK}}$

3. on calcule $U_{n+1} - U_n$

$$= \frac{4U_n}{U_n+4} - U_n = \frac{4U_n - U_n(U_n+4)}{U_n+4}$$

→ on obtient $U_{n+1} - U_n = \frac{4U_n - U_n^2 - 4U_n}{U_n+4} = \frac{-U_n^2)<0}{U_n+4)>0}$

on a donc $U_{n+1} - U_n < 0$ pour tout n

→ la suite (U_n) est décroissante.

4. (U_n) est donc décroissante et minorée par 0.

Donc (U_n) est une suite convergente.

5. On part de $V_{n+1} = \frac{4}{U_{n+1}} = \frac{4}{\frac{4U_n}{U_n+4}} = \frac{\cancel{4}(U_n+4)}{\cancel{4}U_n}$

→ on a donc $V_{n+1} = \frac{U_n+4}{U_n} = \frac{U_n}{U_n} + \frac{4}{U_n}$

$$= 1 + V_n$$

soit $V_{n+1} = V_n + 1$

→ (V_n) est une suite arithmétique de raison $\boxed{1}$
et de premier terme $V_0 = \frac{4}{U_0} = \frac{4}{1} = \boxed{4}$

→ on utilise la formule des suites arithmétiques

$$V_n = V_0 + (n-0) \times \text{raison}$$
$$= 4 + n \times 1$$

soit $V_n = 4 + n$ ou $V_n = n + 4$.

6. on sait que $V_n = \frac{4}{U_n}$ → $U_n = \frac{4}{V_n}$

→ on obtient $U_n = \frac{4}{n+4}$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+4) = +\infty$

on se retrouve avec une limite du type $\frac{4}{+\infty}$

→ on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

Exercice au choix → <u>exercice A</u>

<u>Partie 1</u>

1. on a $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty$ (type $\frac{-\infty}{0}$)

Donc $\lim\limits_{x\to 0} 1 + \frac{\ln x}{x^2} = \boxed{-\infty}$

on a $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ (avec les croissances comparées)

Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} 1 + \frac{\ln x}{x^2} = \boxed{1}$

2. on a $h(x) = 1 + \frac{\ln x}{x^2}$ on utilise $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$\to h'(x) = 0 + \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{(x^2)^2} = \frac{x - 2x\ln x}{x^4}$

soit $h'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$ (en simplifiant par x)

3. sur $]0;+\infty[$, le signe de $h'(x)$ ne dépend que du signe de $1 - 2\ln x$ (car x^3 est positif !).

→ on résout $1 - 2\ln x = 0 \to \ln x = \frac{1}{2} \to x = e^{1/2}$

On obtient :

x	0		$e^{1/2}$		$+\infty$
$1 - 2\ln x$		$+$	0	$-$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	$1 + \frac{1}{2e}$	↘	0

ne pas hésiter à utiliser des valeurs "test" !

on a $h(e^{1/2}) = 1 + \frac{\ln e^{1/2}}{(e^{1/2})^2}$

$= 1 + \frac{1/2}{e} = 1 + \frac{1}{2e}$

4. L'équation $h(x) = 0$ n'a pas de solution sur $[e^{1/2}; +\infty[$ car on a toujours $h(x) > 0$ sur cet intervalle.

et sur l'intervalle $]0; e^{1/2}]$, on utilise le TVI !

En effet :

h est croissante et continue sur $]0; e^{1/2}]$

On a : $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = -\infty$ et $h(e^{1/2}) = 1 + \frac{1}{2e}$

Donc 0 appartient bien à l'intervalle image $]-\infty; 1 + \frac{1}{2e}]$

et d'après le corollaire du TVI, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0 ; e^{1/2}]$.

De plus, on a $h(\frac{1}{2}) < 0$ (négatif)

et $h(1) > 0$ (positif)

Donc la solution α est comprise entre $\frac{1}{2}$ et $1 \to \frac{1}{2} < \alpha < 1$

5. À l'aide des variations et avec ce nombre α,

on en déduit :

x	0		α		$+\infty$
signe de $h(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Partie 2 :

1. on a $f_1(x) - f_2(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x^2} - \left(x - 2 - \frac{2\ln x}{x^2}\right)$

$= \cancel{x} - 1 - \frac{\ln x}{x^2} - \cancel{x} + 2 + 2\frac{\ln x}{x^2}$

$= 1 + \frac{\ln x}{x^2} = h(x)$.

2. sur $]0 ; \alpha]$, on a $h(x) \leq 0$

Donc $f_1(x) - f_2(x) \leq 0$

Donc $\mathcal{C}_1$ est en dessous de $\mathcal{C}_2$

sur $[\alpha ; +\infty[$, on a $h(x) \geq 0$

Donc $f_1(x) - f_2(x) \geq 0$

Donc $\mathcal{C}_1$ est au dessus de $\mathcal{C}_2$

et le point d'intersection est obtenu pour $f_1(x) = f_2(x)$

c'est à dire $h(x) = 0$ soit pour une abscisse égale à α.

et donc une ordonnée égale à $f_1(\alpha)$ (ou $f_2(\alpha)$).

⚠ cette fin est un peu "technique".

on a $f_1(\alpha) = \alpha - 1 - \frac{\ln \alpha}{\alpha^2}$

or α est défini par $h(\alpha) = 0$ soit $1 + \frac{\ln \alpha}{\alpha^2} = 0$

cela nous donne $\ln \alpha = -\alpha^2$

et donc $f_1(\alpha) = \alpha - 1 - \frac{-\alpha^2}{\alpha^2} = \alpha - 1 + 1 = \alpha$

→ le point d'intersection a bien pour coordonnées $(\alpha ; \alpha)$

Exercice au choix → exercice B

Partie 1

1. sur $]-\infty;-1]$, on voit que f' est positive
donc f est croissante

sur $[-1;+\infty[$, on voit que f' est négative
donc f est décroissante

2. sur $]-\infty;0]$, on voit que f' est décroissante
soit f'' négative et donc f concave

sur $[0;+\infty[$, on voit que f' est croissante
soit f'' positive et donc f convexe.

Partie 2

1. on a $f(x) = (x+2)e^{-x} = xe^{-x} + 2e^{-x} = \frac{x}{e^{x}} + 2e^{-x}$

$e^{-x} = \frac{1}{e^{x}}$

avec les croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x}} = 0$

et on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ (car $-x$ tend vers $-\infty$)

On obtient : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ → asymptote horizontale d'équation $y=0$.

2. ⓐ on part de $f(x) = (x+2)e^{-x}$ / on applique $(uv)' = u'v + uv'$

On a : $f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+2)(-e^{-x})$ avec $(e^{-x})' = -e^{-x}$ ⚠

$= e^{-x}(1-x-2) = e^{-x}(-x-1)$.

ⓑ sur $\mathbb{R}$, le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $(-x-1)$ car e^{-x} sera toujours positif.

→ on résout $-x-1=0$ → $x=-1$.

on obtient :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-x-1$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

$f(-1) = (-1+2)e^{-(-1)}$
$= 1e^1 = \boxed{e}$.

c) La question semble mal formulée ici car il y a 2 solutions sur $\mathbb{R}$ à l'équation $f(x) = 2$.

→ on va se contenter de faire un TVI sur $[-2;-1]$ afin de répondre au mieux à la question.

On a : f croissante et continue sur $[-2;-1]$

$f(-2) = (-2+2)e^{-(-2)} = 0$ et $f(-1) = e \simeq 2{,}7$

et donc 2 appartient à l'intervalle image $[0;e]$

et d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $[-2;-1]$.

À la calculatrice, on obtient environ $-1{,}6$.

3. on part de $f'(x) = (-x-1)e^{-x}$ / on applique $(uv)' = u'v + uv'$

on obtient $f''(x) = -1e^{-x} + (-x-1)(-e^{-x})$

$= e^{-x}(-1+x+1) = e^{-x} \times x$

Donc le signe de f'' ne dépend que du signe de x.

→ si $x \in]-\infty;0]$ alors $f''(x) \leq 0$ et f est concave

→ si $x \in [0;+\infty[$ alors $f''(x) \geq 0$ et f est convexe

Le point A est le point d'inflexion car c'est le point où il y a un changement de concavité.