Vecteurs coplanaires
Comment montrer que quatre points sont coplanaires

Principe du raisonnement

Il faut déjà avoir à l'esprit que 2 vecteurs sont toujours coplanaires ainsi que 3 points de l'espace qui sont également toujours coplanaires.

Du coup, la question se posera quand on voudra savoir si 3 vecteurs ou 4 points sont coplanaires (avec des méthodes de calculs qui seront les mêmes dans les deux cas).

Trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont ***coplanaires*** si l'un des vecteurs peut s'écrire comme ***combinaison linéaire*** des deux autres .
On cherche donc l'existence de deux nombres x et y tels que $\overrightarrow{AD} = x\ \overrightarrow{AB} + y\ \overrightarrow{AC}$

Quatre points A , B , C et D sont ***coplanaires*** si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont ***coplanaires.***
Il faut à nouveau vérifier que l'un des vecteurs s'écrit comme ***combinaison linéaire*** des deux autres .
On cherche à nouveau l'existence de deux nombres x et y tels que $\overrightarrow{AD} = x\ \overrightarrow{AB} + y\ \overrightarrow{AC}$

Principe du calcul

Une fois que l'on a bien les coordonnées des trois vecteurs, on obtient un système de 3 équations à 2 inconnues. C'est donc une équation "*en plus*" qui ne servira pas directement à trouver les solutions, mais plutôt à vérifier leur exactitude !!

a) on prend les ***deux premières équations*** sans se poser trop de questions et on résout le système correspondant qui sera un ***système de 2 équations à 2 inconnues*** (voir les fiches de Seconde).
b) ***on utilise la 3ème équation pour vérifier*** la cohérence des solutions obtenus.
Si cette 3ème équation est vérifiée, alors les 4 points sont bien coplanaires.
Et si cette 3ème équation n'est pas vérifiée, alors les 4 points ne sont pas coplanaires.

Exemple 1

Montrons que les points A (1 ; 2 ; 3) , B (- 3 ; 5 ; 2) , C (3 ; 1 ; 1) et D (9 ; 0 ; - 15) sont coplanaires.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A = -3-1 = -4 \\ y_B - y_A = 5-2 = 3 \\ z_B - z_A = 2-3 = -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -18 \end{pmatrix}$

• On cherche x et y tels que $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$

soit $\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -18 \end{pmatrix} = x \times \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + y \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ → on obtient $\begin{cases} -4x + 2y = 8 \\ 3x - y = -2 \\ -x - 2y = -18 \end{cases}$

• On résout le système avec les deux premières équations

$\begin{matrix} \times(-3) \\ \times 4 \end{matrix} \begin{cases} -4x + 2y = 8 \\ 3x - y = -2 \end{cases}$ → $\boxed{-}\begin{cases} 12x - 6y = -24 \\ 12x - 4y = -8 \end{cases}$

$-2y = -16$ → $y = \boxed{8}$

et on remplace y par 8 dans la première équation

$-4x + 2 \times 8 = 8$ → $-4x + 16 = 8$ → $x = \boxed{2}$

- On vérifie la troisième équation avec $x = 2$ et $y = 8$
  ↳ on a bien $-2 - 2 \times 8 = -2 - 16 = -18 \rightarrow \boxed{OK}$

Donc on peut écrire $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 8\overrightarrow{AC}$

↳ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

↳ les points A, B, C et D sont coplanaires.

Exemple 2

Montrons que les points A (1 ; 2 ; 3) , B (- 1 ; 5 ; 4) , C (0 ; 5 ; 1) et D (2 ; - 4 ; 2) ne sont pas coplanaires.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A = -1 - 1 = -2 \\ y_B - y_A = 5 - 2 = 3 \\ z_B - z_A = 4 - 3 = 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$

- On cherche x et y tels que $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$

soit $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} = x \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + y \times \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow$ on obtient $\begin{cases} -2x - y = 1 \\ 3x + 3y = -6 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$

- On résout le système avec les deux premières équations

$\begin{matrix} \times(-3) \\ \times 2 \end{matrix} \begin{cases} -2x - y = 1 \\ 3x + 3y = -6 \end{cases} \rightarrow \boxed{-} \begin{cases} 6x + 3y = -3 \\ 6x + 6y = -12 \end{cases}$

$-3y = 9 \rightarrow y = \boxed{-3}$

et on remplace y par -3 dans la première équation

$-2x - (-3) = 1 \rightarrow -2x + 3 = 1 \rightarrow x = \boxed{1}$

- On vérifie la troisième équation avec $x = 1$ et $y = -3$
  ↳ on a $1 - 2 \times (-3) = 1 + 6 = \boxed{7 \neq -1}$

Donc le système de trois équations n'a pas de solution.

↳ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires

↳ les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.