Comment savoir si des droites sont sécantes et comment trouver leur point d'intersection : méthode 1

Méthode

Le principe est de résoudre les 3 équations entre les coordonnées respectives des 2 droites.
On obtient alors un système de 3 équations à 2 inconnues. C'est donc une équation "***en plus***" qui ne servira pas directement à trouver les solutions, mais plutôt à vérifier leur exactitude !!

a) il faut que les deux droites soient écrites avec ***deux paramètres différents*** (k et k' par exemple), même si l'énoncé ne l'a pas lui-même fait avant !

b) on prend les ***deux premières équations*** sans se poser trop de questions et on résout le système correspondant qui sera un ***système de 2 équations à 2 inconnues*** (voir les fiches de Seconde).

c) ***on utilise la 3ème équation pour vérifier*** la cohérence des solutions obtenus.
Si cette 3ème équation est vérifiée, alors les 2 droites sont bien sécantes, et le point d'intersection est obtenu en rempaçant k et k' dans les équations paramétriques des 2 droites.
Et si cette 3ème équation n'est pas vérifiée, alors les 2 droites ne sont pas sécantes.

L'énoncé

Les droites $(d) : \begin{cases} x = 9 + k \\ y = -1 + 2k \\ z = -3k \end{cases}$ et $(d') : \begin{cases} x = k' \\ y = 2 - k' \\ z = -1 + k' \end{cases}$ sont elles sécantes ?

La solution

On résout le système $\begin{cases} 9 + k = k' \\ -1 + 2k = 2 - k' \\ -3k = -1 + k' \end{cases}$

→ on résout le système avec les deux premières équations.

$\begin{cases} 9 + k = k' \\ -1 + 2k = 2 - k' \end{cases}$ soit $\begin{cases} k - k' = -9 \quad (\times 2) \\ 2k + k' = 3 \end{cases}$ → $\begin{cases} 2k - 2k' = -18 \\ 2k + k' = 3 \end{cases}$ (–)

$-3k' = -21$

On obtient $k' = \frac{-21}{-3} = \boxed{7}$ que l'on remplace dans la 1ère équation.

→ $k - 7 = -9$ → $k = -9 + 7 = \boxed{-2}$

et on vérifie maintenant la 3e équation !!

→ on a bien $-3 \times \underbrace{(-2)}_{k} = -1 + \underbrace{7}_{k'} = 6$!

Conclusion

Les droites sont sécantes avec $k = -2$ et $k' = 7$

→ pour (d) $\begin{cases} x = 9 + (-2) = \boxed{7} \\ y = -1 + 2 \times (-2) = \boxed{-5} \\ z = -3 \times (-2) = \boxed{6} \end{cases}$ et pour (d') $\begin{cases} x = \boxed{7} \\ y = 2 - 7 = \boxed{-5} \\ z = -1 + 7 = \boxed{6} \end{cases}$

→ on obtient le point d'intersection $(7 ; -5 ; 6)$