BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2022

MATHÉMATIQUES

JOUR 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices**.

Chaque exercice est noté sur **7 points (le total sera ramené sur 20 points).**
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

EXERCICE 1 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Probabilités.

Au basket-ball, il existe deux sortes de tir :

- les *tirs à deux points*.
  Ils sont réalisés près du panier et rapportent deux points s'ils sont réussis.

- les *tirs à trois points*.
  Ils sont réalisés loin du panier et rapportent trois points s'ils sont réussis.

Stéphanie s'entraîne au tir. On dispose des données suivantes :

- Un quart de ses tirs sont des tirs à deux points. Parmi eux, 60% sont réussis.
- Trois quarts de ses tirs sont des tirs à trois points. Parmi eux, 35% sont réussis.

1. Stéphanie réalise un tir. On considère les événements suivants :
D : « Il s'agit d'un tir à deux points ».
R : « le tir est réussi ».

a. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

b. Calculer la probabilité $P(\overline{D} \cap R)$.

c. Démontrer que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir est égale à $0{,}4125$.

d. Stéphanie réussit un tir. Calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un tir à trois points. Arrondir le résultat au centième.

2. Stéphanie réalise à présent une série de 10 tirs à trois points.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de tirs réussis.
On considère que les tirs sont indépendants. On rappelle que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir à trois points est égale à $0{,}35$.

a. Justifier que X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

b. Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

c. Déterminer la probabilité que Stéphanie rate 4 tirs ou plus. Arrondir le résultat au centième.

d. Déterminer la probabilité que Stéphanie rate au plus 4 tirs. Arrondir le résultat au centième.

3. Soit n un entier naturel non nul.
Stéphanie souhaite réaliser une série de n tirs à trois points. On considère que les tirs sont indépendants. On rappelle que la probabilité qu'elle réussisse un tir à trois points est égale à $0{,}35$.

Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité que Stéphanie réussisse au moins un tir parmi les n tirs soit supérieure ou égale à $0{,}99$.

EXERCICE 2 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Fonctions, Fonction logarithme.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - x - 2\,.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$.
On note f' sa dérivée, f'' sa dérivée seconde et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. **a.** Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$, on a $f'(x) = \ln(x)$.

b. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = \mathrm{e}$.

c. Justifier que la fonction f est convexe sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

d. En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la tangente T.

2. **a**. Calculer la limite de la fonction f en 0.

b. Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à $+\infty$.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

4. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0;+\infty[$. On note α cette solution.

b. Justifier que le réel α appartient à l'intervalle $]4{,}3\,;4{,}4[$.

c. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

5. On considère la fonction `seuil` suivante écrite dans le langage Python :

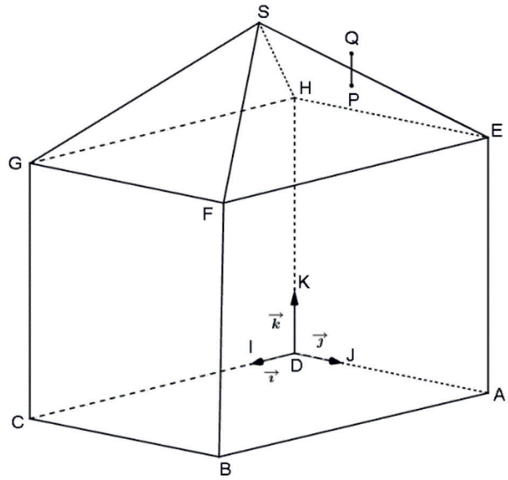
On rappelle que la fonction `log` *du module* `math` *(que l'on suppose importé) désigne la fonction logarithme népérien* $\ln$.

```
def seuil(pas):
    x=4.3
    while x*log(x)-x-2<0:
        x=x+pas
    return x
```

Quelle est la valeur renvoyée à l'appel de la fonction `seuil(0.01)` ?
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 3 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Géométrie dans l'espace.



Une maison est modélisée par un parallélépipède rectangle $\mathrm{ABCDEFGH}$ surmonté d'une pyramide EFGHS .

On a $\mathrm{DC} = 6$, $\mathrm{DA} = \mathrm{DH} = 4$.

Soit les points I, J et K tels que
$\overrightarrow{\mathrm{DI}} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{DC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DJ}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{DA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DK}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{DH}}$.

On note $\vec{\imath} = \overrightarrow{\mathrm{DI}}$, $\vec{\jmath} = \overrightarrow{\mathrm{DJ}}$, $\vec{k} = \overrightarrow{\mathrm{DK}}$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{D}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On admet que le point S a pour coordonnées $(3\,;2\,;6)$.

1. Donner, sans justifier, les coordonnées des points $\mathrm{B}, \mathrm{E}, \mathrm{F}$ et G .

2. Démontrer que le volume de la pyramide EFGHS représente le septième du volume total de la maison.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur} .$$

3. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (EFS).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EFS) est $y + z - 8 = 0$.

4. On installe une antenne sur le toit, représentée par le segment $[\mathrm{PQ}]$.
On dispose des données suivantes :

- le point P appartient au plan (EFS) ;
- le point Q a pour coordonnées $(2\,;3\,;5{,}5)$;
- la droite (PQ) est dirigée par le vecteur $\vec{k}$.

a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (PQ) est :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5{,}5 + t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

b. En déduire les coordonnées du point P.

c. En déduire la longueur PQ de l'antenne.

Un oiseau vole en suivant une trajectoire modélisée par la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -4 + 6s \\ y = 7 - 4s \\ z = 2 + 4s \end{cases} \qquad (s \in \mathbb{R})$$

Déterminer la position relative des droites (PQ) et Δ.
L'oiseau va-t-il percuter l'antenne représentée par le segment $[\mathrm{PQ}]$?

EXERCICE 4   (7 points)

Principaux domaines abordés : Suites ; Fonctions, Primitives.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}\ .$$

On peut affirmer que :

a. la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

b. la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

c. la suite (u_n) n'a pas de limite.

d. la suite (u_n) converge.

⁂

Dans les questions **2** et **3**, on considère deux suites (v_n) et (w_n) vérifiant la relation :

$$w_n = \mathrm{e}^{-2v_n} + 2$$

2. Soit a un nombre réel strictement positif. On a $v_0 = \ln(a)$.
On peut affirmer que :

a. $w_0 = \frac{1}{a^2} + 2$

b. $w_0 = \frac{1}{a^2+2}$

c. $w_0 = -2a + 2$

d. $w_0 = \frac{1}{-2a} + 2$

3. On sait que la suite (v_n) est croissante. On peut affirmer que la suite (w_n) est :

a. décroissante et majorée par 3 .

b. décroissante et minorée par 2 .

c. croissante et majorée par 3 .

d. croissante et minorée par 2 .

4. On considère la suite (a_n) ainsi définie :

$$a_0 = 2 \text{ et, pour tout entier naturel } n, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{8}{3} \ .$$

Pour tout entier naturel n, on a :

a. $a_n = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2$

b. $a_n = -\frac{2}{3^n} + 4$

c. $a_n = 4 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$

d. $a_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{8n}{3}$

5. On considère une suite (b_n) telle que, pour tout entier naturel n, on a :

$$b_{n+1} = b_n + \ln\left(\frac{2}{(b_n)^2+3}\right).$$

On peut affirmer que :

a. la suite (b_n) est croissante.

b. la suite (b_n) est décroissante.

c. la suite (b_n) n'est pas monotone.

d. Le sens de variation de la suite (b_n) dépend de b_0.

6. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x} \ .$$

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal.
La courbe $\mathcal{C}_g$ admet :

a. une asymptote verticale et une asymptote horizontale.

b. une asymptote verticale et aucune asymptote horizontale.

c. aucune asymptote verticale et une asymptote horizontale.

d. aucune asymptote verticale et aucune asymptote horizontale.

7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2+1}$.
Soit F une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f. Pour tout réel x, on a :

a. $F(x) = \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{x^2+1}$

b. $F(x) = (1 + 2x^2)\mathrm{e}^{x^2+1}$

c. $F(x) = \mathrm{e}^{x^2+1}$

d. $F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2+1}$