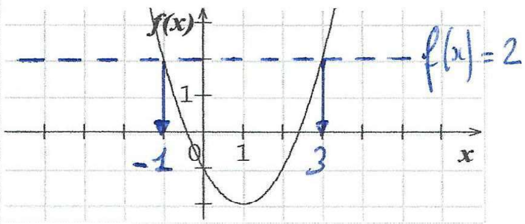
Comment résoudre graphiquement une équation du type $f(x) = 2$

Les questions posées vont toutes être ici du type " *résoudre l'équation* $f(x) = 2$ ".
On doit bien comprendre que l'on connait l'image 2 et que l'on recherche ses éventuels antécédents.

La méthode pour résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 2$

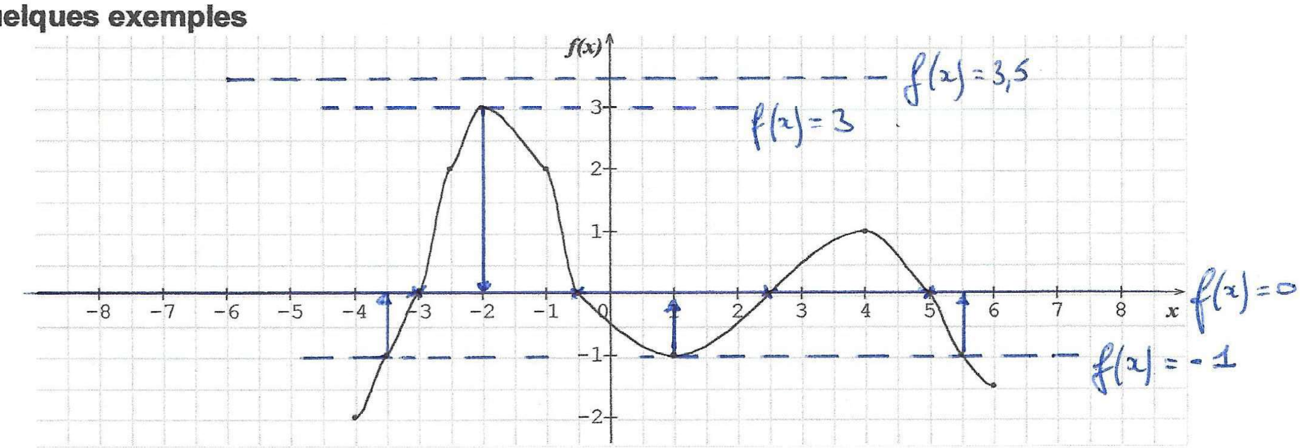
On se place sur *l'ordonnée* 2 (car le nombre 2 est une image).
On trace un "*trait horizontal*" passant par cette ordonnée 2 (ou on juste s'aider d'une règle).
On repère les éventuels *points d'intersection* avec la courbe, en notant *l'abscisse* de ces points.



On a $S = \{-1 ; 3\}$

L'ensemble solution S se note avec des accolades

Quelques exemples



pour l'équation $f(x) = 3,5$
→ On constate qu'il n'y pas de point d'intersection entre le trait "horizontal" et la courbe !!

$S = \emptyset$ (ensemble vide) → il n'y a pas de solution.

pour l'équation $f(x) = 3$

$S = \{-2\}$ → il y a une unique solution.

pour l'équation $f(x) = 0$ (inutile de tracer un trait, car on est sur l'axe des abscisses)
→ Cette équation est particulièrement importante, car elle permet de situer les images par rapport à 0, ce qui nous permettra ensuite de parler des *signes de la fonction.*

$S = \{-3 ; -0,5 ; 2,5 ; 5\}$ → il y a quatre solutions.

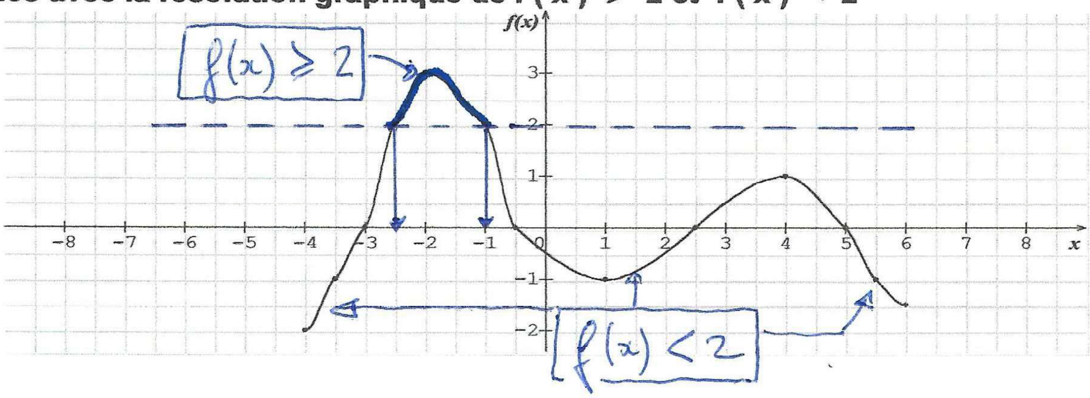
pour l'équation $f(x) = -1$

$S = \{-3,5 ; 1 ; 5,5\}$ → il y a trois solutions.

Comment résoudre graphiquement une inéquation du type $f(x) \geqslant 2$

La résolution de ces *inéquations* commencera forcément par la résolution de ***l'équation*** $f(x) = 2$.
→ Une fois cette équation résolue, on pourra résoudre l'inéquation en utilisant des *intervalles* (avec les crochets [ou]) et, éventuellement, le symbole union "$\cup$" si il y a plusieurs intervalles à réunir.
→ Pour trouver les intervalles, on prendra les parties de la courbe ***au dessus*** du "*trait horizontal*" pour $f(x) \geqslant k$ et $f(x) > k$, et ***en dessous*** du '*trait horizontal*" pour $f(x) \leqslant k$ et $f(x) < k$.
→ Pour savoir si le crochet est "ouvert" ou "fermé", on peut partir avec l'idée suivante (un peu schématique) : avec $\geqslant$ ou $\leqslant$, les crochets sont fermés, et avec $>$ ou $<$, les crochets sont ouverts.

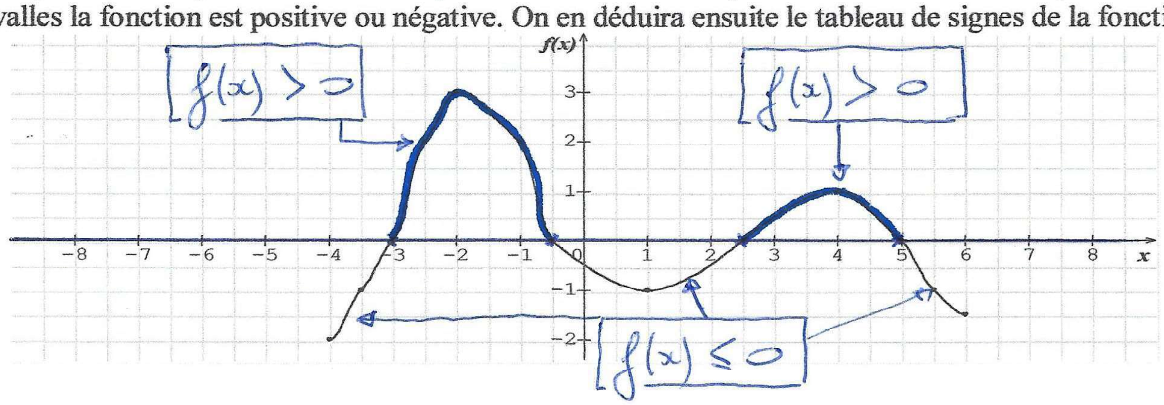
Exemples avec la résolution graphique de $f(x) \geqslant 2$ *et* $f(x) < 2$



pour l'inéquation $f(x) \geqslant 2$	On a $S = [-2{,}5\,;\,-1]$
pour l'inéquation $f(x) < 2$	On a $S = [-4\,;\,-2{,}5[\ \cup\ ]-1\,;\,6]$

Exemples avec la résolution graphique de $f(x) > 0$ *et* $f(x) \leqslant 0$

Ces inéquations sont particulièrement importantes car elles nous permettent de savoir dans quels intervalles la fonction est positive ou négative. On en déduira ensuite le tableau de signes de la fonction !!



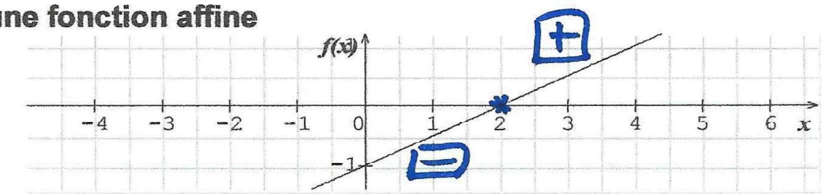
pour l'inéquation $f(x) > 0$	On a $S =]-3\,;\,-0{,}5[\ \cup\ ]2{,}5\,;\,5[$
pour l'inéquation $f(x) \leqslant 0$	On a $S = [-4\,;\,-3] \cup [-0{,}5\,;\,2{,}5] \cup [5\,;\,6]$

Comment faire le tableau de signes d'une fonction

La résolution de l'*inéquation* $f(x) \geqslant 0$ nous permettra de savoir sur quels intervalles la fonction est positive et ainsi de compléter le *tableau de signes*, en mettant le signe + dans les intervalles correspondants !! Et on mettra le signe − lorsque la fonction est négative (soit $f(x) \leqslant 0$).
La méthode suivante doit être bien suivie :

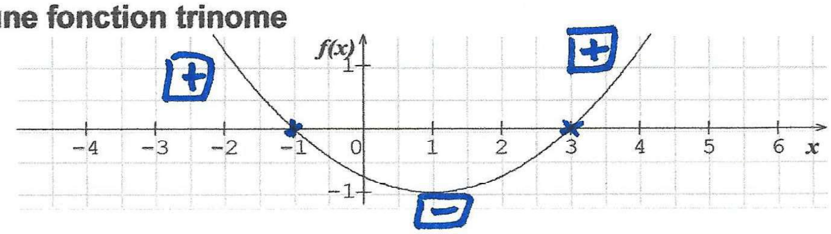
- on place sur la première ligne du tableau les nombres qui annulent la fonction (ce sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$, c'est à dire les abscisses des *points d'intersection entre la courbe et l'axe des abscisses*) et on écrit le 0 correspondant sur la deuxième ligne.
- on complète alors le tableau à l'aide des signes + et − !!

Exemple avec une fonction affine



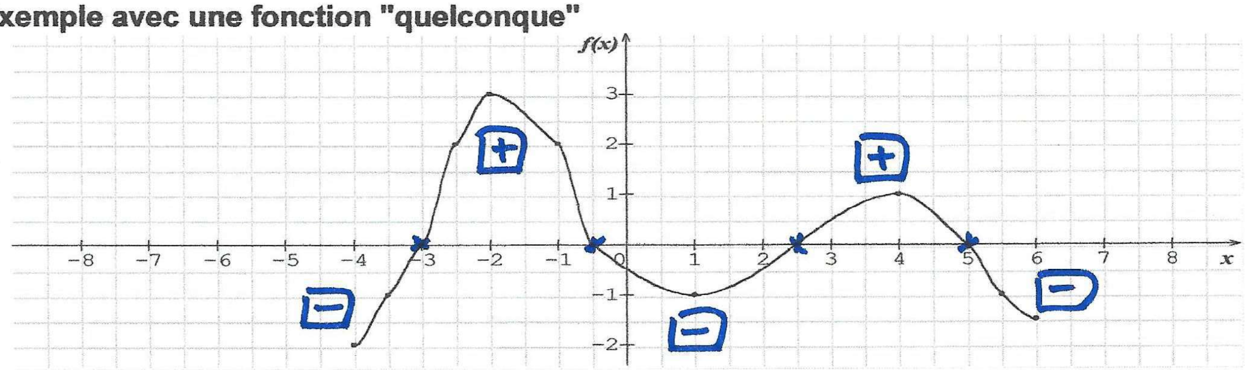
x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signes de f (x)		−	0	+	

Exemple avec une fonction trinome



x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
Signes de f (x)		+	0	−	0	+	

Exemple avec une fonction "quelconque"

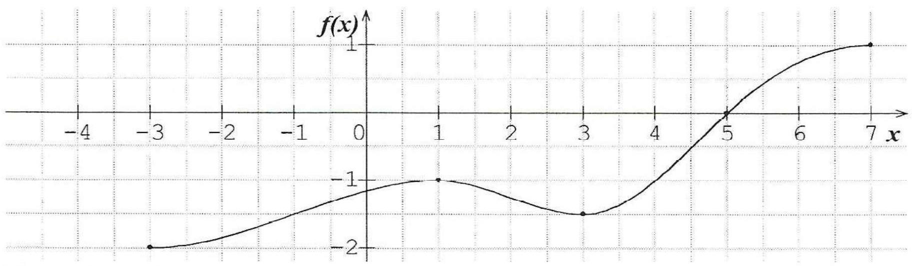


x	$-\infty$		-3		$-0,5$		$2,5$		5		$+\infty$
Signes de f (x)		−	0	+	0	−	0	+	0	−	

Comment bien différencier les variations et les signes

Une fois que l'on sait faire le tableau de variations d'une fonction et son tableau de signes, il ne faudra surtout pas les confondre. En effet, on peut souvent lire le ***raisonnement (faux)*** du type :
"*sur cet intervalle, la fonction est croissante (elle "monte") donc elle est positive*".
Le meilleur conseil à donner est de bien écrire, pour chacun des tableaux, les nombres qui se retrouvent sur la première ligne (***des nombres qui n'ont aucune raison d'être les mêmes pour les deux tableaux***):
→ pour le tableau de *variations*, ils sont liés aux points qui amènent un *changement de variations*.
→ pour le tableau de *signes*, ils sont liés aux *points d'intersection* entre la courbe et l'axe des abscisses.

Exemple n°1



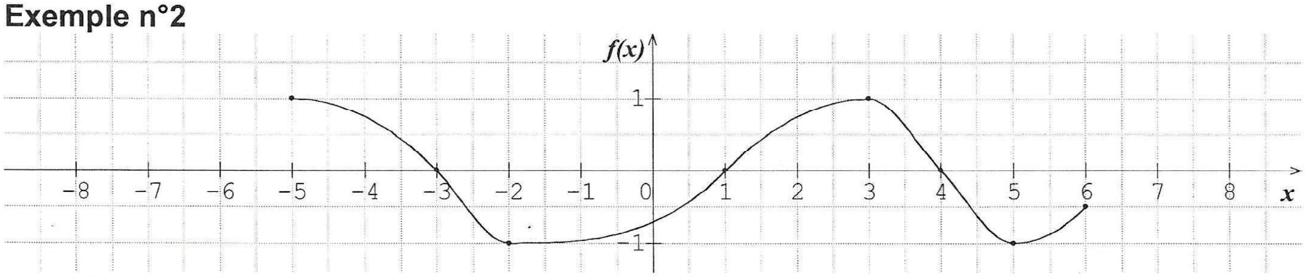
On obtient le ***tableau de variations*** suivant :

x	−3		1		3		7
Variations de f(x)	−2	↗	−1	↘	−1,5	↗	1

On obtient le ***tableau de signes*** suivant :

x	−3		5		7
Signes de f(x)		−	0	+	

Exemple n°2



On obtient le ***tableau de variations*** suivant :

x	−5		−2		3		5		6
Variations de f(x)	1	↘	−1	↗	1	↘	−1	↗	−0,5

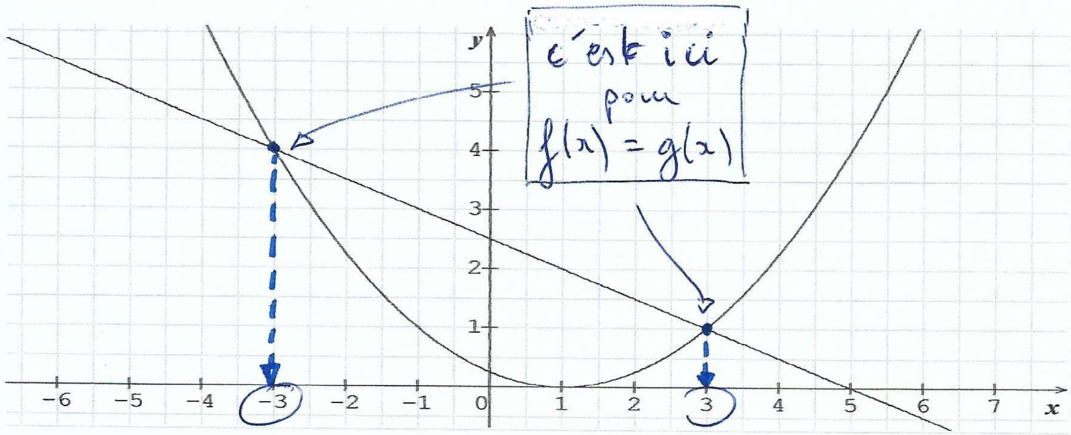
On obtient le ***tableau de signes*** suivant :

x	−5		−3		1		4		6
Signes de f(x)		+	0	−	0	+	0	−	

Comparaison graphique de deux fonctions

Savoir résoudre l'équation $f(x) = g(x)$

Quand on a la représentation graphique de chacune des fonctions, résoudre **l'équation $f(x) = g(x)$** est très facile. Il suffit de donner **<u>l'abscisse des éventuels points d'intersections</u>** entre ces deux courbes.



Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont

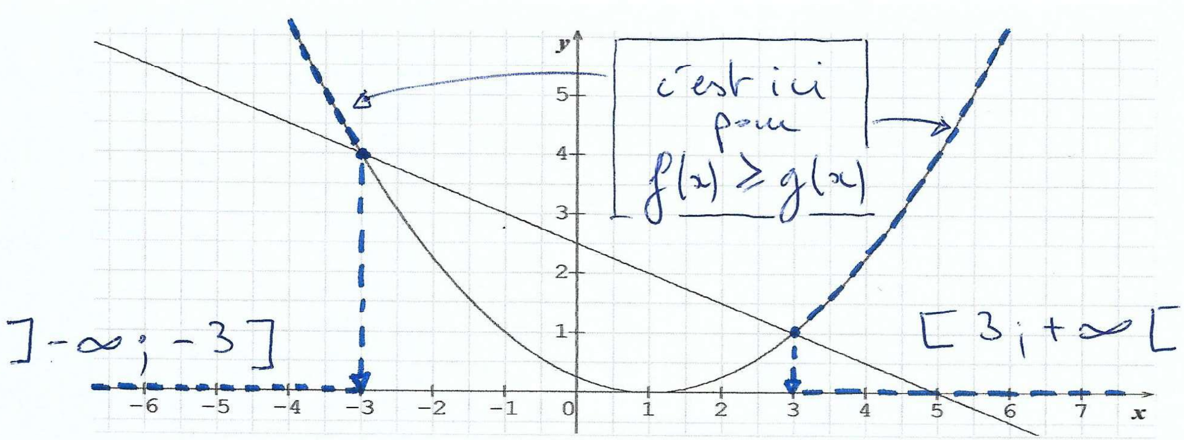
$S = \{-3\,;\,3\}$

Savoir résoudre les inéquations $f(x) \geqslant g(x)$ et $f(x) \leqslant g(x)$

Pour résoudre ces inéquations, on doit déjà connaitre les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.
On donne ensuite les intervalles pour lesquels :

- la courbe de $f(x)$ est ***au dessus*** de la courbe de $g(x)$ (soit $f(x) \geqslant g(x)$)
- la courbe de $f(x)$ est ***en dessous*** de la courbe de $g(x)$ (soit $f(x) \leqslant g(x)$).

Résumé	courbe de $f(x)$ ***au dessus*** de courbe de $g(x)$ $\leftrightarrow$ $f(x) \geqslant g(x)$ courbe de $f(x)$ ***en dessous*** de courbe de $g(x)$ $\leftrightarrow$ $f(x) \leqslant g(x)$



Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ sont

$S =]-\infty\,;-3] \cup [3\,;+\infty[$

et pour $f(x) \leq g(x)$, on aurait $S = [-3\,;\,3]$!!