Corrigé de l'épreuve de mathématiques

du Bac Spécialité Maths

Centres étrangers juin 2021 (pour candidats libres)

Sujet 2

Correction proposée
par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1 : Les bonnes réponses à ce QCM sont

1. $\boxed{a}$ 2. $\boxed{b}$ 3. $\boxed{c}$ 4. $\boxed{b}$ 5. $\boxed{b}$

Voici quelques explications (même si elles ne sont pas demandées).

Question 1 : l'équation de la tangente en 1 sera :

$$y = g'(1)(x-1) + g(1)$$

avec $g(1) = 1^2 + 2\times 1 - \frac{3}{1} = 0$

on a $\left(-\frac{3}{x}\right)' = \left(-3\times\frac{1}{x}\right)' = -3\times\frac{-1}{x^2}$

et $g'(x) = 2x + 2 - 3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x + 2 + \frac{3}{x^2}$

soit $g'(1) = 2\times 1 + 2 + \frac{3}{1^2} = 7$

on obtient : $y = 7(x-1) + 0 = 7(x-1)$ → réponse $\boxed{a}$

Question 2 : on a $\frac{3n}{n+2} = \frac{3n}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \frac{3}{1+\frac{2}{n}}$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$ et on a donc une limite du

type $\frac{3}{1+0}$ soit $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$ → réponse $\boxed{b}$

Question 3 : pas si facile que ça !!

on doit reconnaître l'utilisation d'une loi binomiale

$B(n;p)$ en prenant $n = 10$ et $p = p(\text{tirer une noire}) = \frac{6}{10} = 0{,}6$

→ on cherche donc la probabilité de tirer exactement

4 boules noires soit $p(X=4)$

→ on obtient environ 0,1115 avec binomFdp

→ réponse $\boxed{c}$.

Question 4 : on se retrouve avec une forme indéterminée

que l'on va lever en factorisant par e^x.

On a $3e^x - x = e^x\left(3 - \frac{x}{e^x}\right)$

on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ (croissances comparées).

et on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (limite du type $+\infty\times(3-0)$
ou $+\infty\times 3$)

→ réponse $\boxed{b}$

<u>Question 5</u> : on peut répéter les signes et l'ordre de ces signes est important.

→ on se retrouve avec un "p-uplets"

→ le nombre total de codes est donc $36^8 = 2,8\times10^{12}$

Et on peut finir avec un produit en croix à partir du tableau suivant :

100 millions →

100×10^6 codes en	1 s
$2,8\times10^{12}$ codes en	?

on obtient : $(2,8\times10^{12}\times 1):(100\times10^6) = 28\,211$ sec

$\approx 7,8$ h

(1h = 3600 sec) ≈ 8 h

→ réponse $\boxed{b}$

Exercice 2

Partie A

1. a) baisse de 2% → coefficient égal à $\left(1 - \frac{2}{100}\right) = 0,98$

Donc on a bien $U_{n+1} = \underbrace{0,98\, U_n}_{\text{baisse de } 2\%} + \underbrace{250}_{\text{on ajoute 250 panneaux}}$

b) on utilise le mode SUITE de la calculatrice et dans le tableau de valeurs il faut aller jusqu'au rang 68 (soit 68 ans !) pour dépasser 12 000 panneaux.

c) on écrira :

```
u = 10 560
n = 0
while u ≤ 12 000
  u = 0,98 * u + 250
  n = n + 1
```

2. c'est une récurrence très classique !

Init : on a $U_0 = 10\,560 \leq 12\,500$ → OK

Hérédité : on suppose $U_n \leq 12\,500$

soit $0,98\,U_n \leq 12\,250$ ← $12\,500 \times 0,98$

soit $0,98\,U_n + 250 \leq 12\,500$ ← $12\,250 + 250$

soit $U_{n+1} \leq 12\,500$ → OK

3. on calcule $U_{n+1} - U_n = 0,98\,U_n + 250 - U_n$

$= -0,02\,U_n + 250$

or $U_n \leq 12\,500$

→ $-0,02\,U_n \geq -250$

→ $-0,02\,U_n + 250 \geq 0$

on a donc $U_{n+1} - U_n \geq 0$ → (U_n) est croissante.

4. La suite (U_n) est croissante et majorée (par 12 500)

→ la suite (U_n) est convergente.

5. on a $V_n = U_n - 12500 \rightarrow U_n = V_n + 12500$

a) on a donc $V_{n+1} = U_{n+1} - 12500$

$$= 0,98U_n + 250 - 12500$$

$$= 0,98(V_n + 12500) - 12250$$

$$= 0,98V_n + \underbrace{0,98 \times 12500 - 12250}_{0}$$

→ on a donc $V_{n+1} = 0,98V_n$

→ (V_n) est une suite géométrique de raison 0,98 et de premier terme $V_0 = U_0 - 12500 = 10560 - 12500 = -1940$

b) on a donc $V_n = V_0 \times q^{(n-0)} \rightarrow V_n = -1940 \times (0,98)^n$

c) on a $U_n = V_n + 12500 \rightarrow U_n = -1940 \times (0,98)^n + 12500$

d) on a $-1 < 0,98 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,98)^n = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -1940 \times (0,98)^n = 0 \longrightarrow$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 12500$

→ à terme, il y aura 12500 panneaux solaires !

Partie B

1. on a $f'(x) = 0 - 500 \times (-0,02) e^{-0,02x+1,4}$ ne pas oublier !

→ $f'(x) = 10e^{-0,02x+1,4}$

→ on a $f'(x) > 0$ pour tout x → la fonction f est croissante

2. on a $\lim\limits_{x \to +\infty} -0,02x + 1,4 = -\infty$

donc on a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-0,02x+1,4} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 12500$

3. on peut utiliser le tableau de valeurs en utilisant le mode fonction de la calculatrice avec $f(x)$

ou on résout l'inéquation $f(x) > 12000$

soit $12500 - 500e^{-0,02x+1,4} > 12000$

soit $500e^{-0,02x+1,4} < 500$

soit $e^{-0,02x+1,4} < 1$

soit $-0,02x + 1,4 < 0 \longrightarrow x > \dfrac{-1,4}{-0,02} = 70$

→ il faut donc attendre la 71e année !!

Exercice 3

Partie A

1. on a $F \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ $I \begin{vmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{vmatrix}$ et $J \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2/3 \end{vmatrix}$

2. on a donc $\overrightarrow{FJ} \begin{vmatrix} 1-1 = 0 \\ 1-0 = 1 \\ 2/3 - 1 = -1/3 \end{vmatrix}$

soit $(d) \begin{cases} x = \boxed{0} + \boxed{0} k \\ y = \boxed{\frac{1}{2}} + \boxed{1} k \\ z = \boxed{\frac{1}{2}} + \boxed{-\frac{1}{3}} k \end{cases}$ $\rightarrow (d) \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} + k \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

point I vecteur $\overrightarrow{FJ}$

3. a) Le point $(0;0;\frac{2}{3})$ est bien sur (AE) car il vérifie bien le fait que $x=0$ et $y=0$.

De plus, le point $(0;0;\frac{2}{3})$ est bien sur (d) car il vérifie son équation paramétrique avec $k = -\frac{1}{2}$

En effet, on obtient $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) = 0 \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times (-\frac{1}{2}) = \frac{2}{3} \end{cases}$

b) Le point L est sur (DH) $\rightarrow y_L = 1$

et on a $L \in (d)$. Donc on aura $y_L = \frac{1}{2} + k = 1 \rightarrow k = \frac{1}{2}$

on en déduit $L \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$

4. a) on va montrer par exemple $\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{KL}$ — attention à l'ordre des lettres

on a $\overrightarrow{FJ} \begin{vmatrix} 1-1 = 0 \\ 1-0 = 1 \\ \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3} \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{KL} \begin{vmatrix} 0-0 = 0 \\ 1-0 = 1 \\ \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \end{vmatrix}$ $\rightarrow$ on a $\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{KL}$

Donc $FJLK$ est un <u>parallélogramme</u>.

b) on peut s'intéresser aux diagonales (FL) et (JK) et vérifier si elles sont $\perp$ soit $\overrightarrow{FL} \cdot \overrightarrow{JK} = 0$

on a $\overrightarrow{FL} \cdot \overrightarrow{JK} = \begin{vmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ \frac{1}{3} - 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0-1 \\ 0-1 \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} = (-1) \times (-1) + (1) \times (-1) + (-\frac{2}{3}) \times 0$

$= 1 - 1 + 0 = 0$

$\rightarrow$ on a $\overrightarrow{FL} \cdot \overrightarrow{JK} = 0$ $\rightarrow$ on a $(FL) \perp (JK)$ $\rightarrow$ $FJLK$ est un <u>losange</u>.

c) on peut s'intéresser aux côtés consécutifs [FJ] et [JL] et vérifier si ils sont $\perp$ soit $\vec{FJ}.\vec{JL} = 0$

On a $\vec{FJ}.\vec{JL} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 0-1=-1 \\ 1-1=0 \\ \frac{1}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{3} \end{vmatrix} = 0\times(-1)+(1)\times 0+(-\frac{1}{3})\times(-\frac{1}{3})$

déjà calculé

$= 0+0+\frac{1}{9} = \frac{1}{9} \neq 0$

Donc FJKL n'est pas un carré (côtés consécutifs non $\perp$).

Partie B

1. on pose J de coordonnées $(x;y;z)$ et on résout

$\vec{CJ} = a\vec{CG}$ soit $\begin{vmatrix} x-1 = a(1-1) \\ y-1 = a(1-1) \\ z-0 = a(1-0) \end{vmatrix} \rightarrow J \begin{vmatrix} x=1 \\ y=1 \\ z=a \end{vmatrix}$

2. on s'intéresse à $\vec{FJ} = \vec{KL}$ comme pour la partie A.

on a $\vec{FJ} \begin{vmatrix} 1-1=0 \\ 1-0=1 \\ a-1=a-1 \end{vmatrix}$ et $\vec{KL} \begin{vmatrix} 0-0=0 \\ 1-0=1 \\ \frac{a}{2}-(1-\frac{a}{2})=a-1 \end{vmatrix}$

$\rightarrow$ on a $\vec{FJ} = \vec{KL} \rightarrow$ FJLK est un parallélogramme

3. on s'intéresse à nouveau à $\vec{FL}.\vec{JK} = 0$

$\rightarrow$ on obtient $\begin{vmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ \frac{a}{2}-1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 0-1 \\ 0-1 \\ 1-\frac{a}{2}-a = 1-\frac{3a}{2} \end{vmatrix} = 0$

soit $(-1)\times(-1) + 1\times(-1) + (\frac{a}{2}-1)\times(1-\frac{3a}{2}) = 0$

soit $1-1+(\frac{a}{2}-1)(1-\frac{3a}{2}) = 0 \rightarrow (\frac{a}{2}-1)(1-\frac{3a}{2}) = 0$

$\rightarrow$ on reconnait une équation produit nul

$\rightarrow \frac{a}{2}-1=0$ ou $1-\frac{3a}{2}=0 \rightarrow \cancel{a=2}$ ou $a=\frac{2}{3}$

impossible car on veut $a \in [0;1]$!

Donc la seule valeur possible sera $a = \frac{2}{3}$

4. Puisque la seule possibilité ici est d'avoir $a = \frac{2}{3}$, on a traité ce cas dans la partie A.

$\rightarrow$ FJLK ne peut donc pas être un carré.

Exercice au choix → exercice A

Partie A

1. soit le test est négatif et on a donc effectué 1 seul
soit le test est positif et on ajoute n analyses après la première analyse faite soit $(n+1)$ analyses

2. $P(X_n = 1)$ correspond à "test négatif" donc aucun des n individus n'est positif → ils sont tous négatifs

$$\to P(X_n = 1) = \underbrace{\underset{(1-0{,}05)}{0{,}95} \times 0{,}95 \times 0{,}95 \times \dots \times 0{,}95}_{n \text{ individus}} = 0{,}95^n$$

on obtient la loi de probabilité suivante :

x_i	1	$n+1$
p_i	$0{,}95^n$	$1-0{,}95^n$

3. L'espérance va ici représenter la moyenne des analyses à effectuer sur n individus testés.

$$\to \text{on a } E(X) = 1 \times 0{,}95^n + (n+1) \times (1-0{,}95^n)$$
$$= \cancel{0{,}95^n} + n - n \times 0{,}95^n + 1 - \cancel{0{,}95^n}$$
$$= n + 1 - n \times 0{,}95^n$$

Partie B

1. on a $f(x) = \ln x + x \ln 0{,}95$

soit $f'(x) = \frac{1}{x} + \ln 0{,}95$

→ on résout $f'(x) = 0$ soit $\frac{1}{x} + \ln 0{,}95 = 0 \to x = -\frac{1}{\ln 0{,}95} \simeq 19{,}5$

on obtient le tableau suivant :

x	20	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	↘	

on a donc $-\frac{1}{\ln 0{,}95} < 20$
et on teste avec $f'(20)$ qui est négatif !

2. on a une forme indéterminée en $+\infty$

→ on factorise par x → $f(x) = x\left(\frac{\ln x}{x} + \ln 0{,}95\right)$

tend vers $+\infty$ — tend vers 0 — nombre négatif

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x} + \ln 0,95\right) = \ln 0,95$ → nombre négatif

et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

3. on a ici une utilisation du TVI.

x	20	$+\infty$
$f(x)$	$f(20)$ ↘ (qui est positif)	$-\infty$

La fonction f est continue et décroissante sur $[20\,;+\infty[$

On a : $f(20) \simeq 1,97 > 0$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Donc le nombre 0 appartient bien à l'intervalle image $[f(20)\,;-\infty[$

et d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution sur $[20\,;+\infty[$.

→ à la calculatrice, on obtient $87 < \alpha < 87,1$.

4. avec les variations de f et cette solution α,

on en déduit :

x	20		α		$+\infty$
signes de f		$+$	0	$-$	

Partie C :

on veut résoudre $E(X_n) < n$

soit $\cancel{n} + 1 - n\times 0,95^n < \cancel{n}$ (les "n" vont s'annuler entre eux)

soit $n\times 0,95^n > 1$

soit $\ln(n\times 0,95^n) > \ln 1$

→ $\ln n + \ln 0,95^n > 0$

ou $\ln n + n\ln 0,95 > 0$

soit finalement $f(n) > 0$

et puisque on a α compris entre 87 et $87,1$,

on voit que la plus grande valeur qui permet de garder f positive sera bien 87 !!

Exercice au choix → exercice B

Partie A

1. on a $f(0) = 3$ → c'est l'image de 0

on a $f'(0) = -2$ → coefficient directeur de la tangente en 0

2. on a $f(0) = e^0 + a\times 0 + b\times e^{-0} = 3$

soit $1 + 0 + b\times 1 = 3 \rightarrow 1+b=3 \rightarrow \boxed{b=2}$

3. ⓐ on a $f(x) = e^x + a\times x + 2e^{-x}$ ← $b=2$

→ $f'(x) = e^x + a + 2\times(-e^{-x})$ on a $(e^{-x})' = -e^{-x}$!!

→ $f'(x) = e^x + a - 2e^{-x}$

ⓑ $f'(0) = e^0 + a - 2e^{-0} = 1 + a - 2\times 1 = a - 1$

ⓒ on sait que $f'(0) = -2 \rightarrow a-1=-2 \rightarrow \boxed{a=-1}$

et on en déduit $f(x) = e^x - x + 2e^{-x}$

4. ⓐ on va utiliser une disposition intéressante ici.

$$\begin{array}{rl} & g(x) = e^x - x + \cancel{2e^{-x}} \\ + & g'(x) = e^x - 1 - \cancel{2e^{-x}} \\ \hline \end{array}$$

ces 2 quantités s'annulent par addition.

→ $g(x) + g'(x) = e^x + e^x - x - 1 = 2e^x - x - 1$

Donc g vérifie bien l'équation (E).

ⓑ on a $y' + y = 0 \rightarrow y' = -y \rightarrow$ solutions : Ae^{-x} $(A \in \mathbb{R})$

(on applique le cours !)

ⓒ Les solutions de (E) s'écrivent alors :

$$g(x) + Ae^{-x} = \underbrace{e^x - x + 2e^{-x}}_{\text{solution particulière de (E)}} + \underbrace{Ae^{-x}}_{\text{solution générale de l'équation homogène}} \quad (\text{avec } A \in \mathbb{R})$$

Partie B

1. on développe $(e^x-2)(e^x+1) = e^{2x} + e^x - 2e^x - 2$

soit $(e^x-2)(e^x+1) = e^{2x} - e^x - 2$

→ on a bien l'égalité souhaitée

2. on a $g(x) = e^x - x + 2e^{-x}$

soit $g'(x) = e^x - 1 - 2e^{-x}$ (déjà vu !)

or $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

Donc $g'(x) = e^x - 1 - 2 \times \dfrac{1}{e^x}$

soit $g'(x) = \dfrac{e^x \times e^x - 1 \times e^x - 2}{e^x}$ (on réduit au même dénominateur)

$\rightarrow g'(x) = \dfrac{e^{2x} - e^x - 2}{e^x} = \dfrac{(e^x - 2)(e^x + 1)}{e^x}$

d'après la question 1

3. on a $e^x > 0$ et $e^x + 1 > 0$ sur $[1 ; +\infty[$

et puisque l'on admet $e^x - 2 > 0$ sur $[1 ; +\infty[$

alors on a $g'(x) > 0$ sur $[1 ; +\infty[$

soit g croissante sur $[1 ; +\infty[$