

Bac Spé Maths 2022
Voici la correction complète
de l'épreuve 1 de
Nouvelle-Calédonie 2022

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

1) a) on a $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \boxed{-\infty}$

→ Cf admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.

b) on peut se factoriser que $x^2 - 6x$ devant la forme indéterminée proposée.

→ on a $f(x) = x^2 \left(1 - \frac{6}{x} \right) + 4 \ln x$

$+ \infty \times 1 \rightarrow 0$

→ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$

2) a) on a $f(x) = x^2 - 6x + 4 \ln x$

→ $f'(x) = 2x - 6 + 4 \times \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 6x + 4}{x}$

b) sur $]0; +\infty[$, on étudie le signe du trinôme au numérateur → $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 2 \times 4 = 4$

soit 2 racines : $x_1 = 2$ et $x_2 = 1$

On obtient le tableau :

x	0	1	2	$+\infty$	
$2x^2 - 6x + 4$	+	0	-	0	+
x	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

$\swarrow -\infty$ $\nearrow -5$ $\searrow -8 + 4\ln(2)$ $\nearrow +\infty$

(on calcule $f(1) = 1^2 - 6 \times 1 + 4 \ln(1) = -5$

et $f(2) = 2^2 - 6 \times 2 + 4 \ln(2) = -8 + 4 \ln(2)$)

3) l'énoncé nous invite à limiter notre travail sur $[4; 5]$ → corollaire du TVI très basique !

soit : La fonction f est continue et strictement croissante sur $[4; 5]$

on a : $f(4) = -8 + 4 \ln(4) \approx -2,45 < 0$
 et $f(5) = -5 + 4 \ln(5) \approx 1,44 > 0$

Donc on a bien $0 \in [f(4); f(5)]$

et d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[4; 5]$.

4) a) on étudie le signe de $2x^2 - 4$

→ 2 racines : $x_1 = -\sqrt{2}$ et $x_2 = \sqrt{2}$

et donc sur l'intervalle $]0; +\infty[$, on obtient :

x	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$2x^2 - 4$	-	0	+
x^2	+	+	+
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	concave		convexe

point d'inflexion de coordonnées $(\sqrt{2}; f(\sqrt{2}))$

avec $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 6\sqrt{2} + 4 \ln(\sqrt{2})$
 $= 2 - 6\sqrt{2} + 4 \times \frac{1}{2} \ln 2 = \boxed{2 - 6\sqrt{2} + 2 \ln 2}$

b) le point A est le point d'inflexion !

si on a $0 < t < \sqrt{2}$, on se trouve dans la partie CONCAVE de $\mathcal{C}_f$ et donc, par définition, le segment $[AM]$ est en dessous de $\mathcal{C}_f$

croquis



et si on a $t > \sqrt{2}$, on se trouve dans la partie CONVEXE de $\mathcal{C}_f$ → $[AM]$ est au dessus de $\mathcal{C}_f$.

croquis



Exercice 2

1) a) $U_1 = f(U_0) = (-1)^3 \times e^{-1} = -e^{-1} \approx -0,368$

$$U_2 = f(U_1) = (-e^{-1})^3 \times e^{-e^{-1}} = -e^{-3} \times e^{-e^{-1}} \approx -0,034$$

b) Avec form (2), on aura i qui varie de 0 à 1
→ le programme va faire 2 fois la boucle
et il va donc calculer $\boxed{U_2 \approx -0,034}$

2) a) on utilise la formule $(uv)' = u'v + uv'$
avec $f(x) = \underbrace{x^3}_u \underbrace{e^x}_v \rightarrow f'(x) = \underbrace{3x^2}_u' \underbrace{e^x}_v + \underbrace{x^3}_u \underbrace{e^x}_v'$

→ en factorisant par x^2 , on a $f'(x) = x^2 e^x (x+3)$
et e^x

b) on a $x^2 > 0$ et $e^x > 0$ sur $]-\infty; +\infty[$

→ le signe de $f'(x)$ ne dépend que de $(x+3)$!

On obtient:

fonction
affine
qui s'annule
en -3.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$x+3$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$-27e^{-3}$	$+\infty$

on calcule: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^x = 0$ (avec les croissances comparées)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^x = +\infty \text{ (par produit simple)}$$

$$\text{et } f(-3) = (-3)^3 e^{-3} = -27e^{-3}$$

③ Initialisation: on a $U_0 = -1$

$$\text{et } U_1 \approx -0,368$$

Donc on a bien $-1 \leq U_0 \leq U_1 \leq 0$ (OK)

Hérédité: on notera que la fonction f est croissante sur $[-3; +\infty[$ donc sur $[-1; +\infty[$

on suppose : $-1 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 0$

soit $f(-1) \leq f(U_n) \leq f(U_{n+1}) \leq f(0)$ (conservation de l'ordre car f est croissante sur $[-1; +\infty[$)

soit $-e^{-1} \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 0$

(on a $f(-1) = (-1)^3 e^{-1} = -e^{-1} \approx -0,368$
et donc on a $-1 \leq -e^{-1}$)

Donc on a bien : $-1 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 0$ **OK**

d) on a : $U_n \leq U_{n+1} \rightarrow (U_n)$ est donc croissante

et $U_n \leq 0 \rightarrow (U_n)$ est majorée (p.c.)

Donc (U_n) est croissante et majorée $\rightarrow$ elle converge !

e) on résout alors $f(l) = l$

soit $l^3 e^l = l$

soit $l^3 e^l - l = 0 \rightarrow l(l^2 e^l - 1) = 0$

c'est une équation produit nul

Donc on a $l = 0$ ou $l^2 e^l - 1 = 0$

cette équation a
une solution unique
qui est $> \frac{1}{2}$

Conclusion : la limite l est égale à 0

car la solution de $x^2 e^x - 1 = 0$ est impossible car elle est $> \frac{1}{2}$ alors que la suite (U_n) est ≤ 0 !!

Exercice 3

1) on a $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) les coordonnées de $\vec{n}$ représentent a, b etc dans l'équation $ax + by + cz + d = 0$

on obtient: $2x + 0y + (-3)z + d = 0$

soit $2x - 3z + d = 0$

or, par exemple, on a $E \in (EHI)$

Donc l'équation doit vérifier $2x_E - 3z_E + d = 0$

soit $2 \times 0 - 3 \times 1 + d = 0$

soit $\boxed{d = 3}$

on obtient donc pour (EHI) : $\boxed{2x - 3z + 3 = 0}$

3) Le triangle IEF est isocèle en I

Donc l'abscisse x_I du point I est au "milieu" de $[EF]$.

$\rightarrow$ on a $x_I = \frac{3}{2} = 1,5$ et il est évident que $y_I = 0$.

MAIS il reste à déterminer z_I !!

or $I \in (EHI)$ donc I vérifie l'équation du 2)

soit $2x_I - 3z_I + 3 = 0$

on obtient: $2 \times 1,5 - 3z_I + 3 = 0$ soit $-3z_I = -6$

$\rightarrow z_I = 2$

Donc le point I a pour coordonnées $(\frac{3}{2}; 0; 2)$.

(la question paraît anodine mais n'était pas si simple!)

4) cette question est un classique et elle nous amène à utiliser deux façons de calculer un produit scalaire.

on sait que $\vec{IE} \cdot \vec{IF} = IE \times IF \times \cos(\widehat{EIF})$

or on a $\vec{IE} \begin{pmatrix} 0 - 3/2 = -3/2 \\ 0 - 0 = 0 \\ 1 - 2 = -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{IF} \begin{pmatrix} 3 - 3/2 = 3/2 \\ 0 - 0 = 0 \\ 1 - 2 = -1 \end{pmatrix}$

Donc on a $\vec{IE} \cdot \vec{IF} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} + 0 \times 0 + (-1) \times (-1)$
 $= \boxed{-\frac{5}{4}}$

De plus, on calcule

$$IE = \sqrt{(0 - \frac{3}{2})^2 + (0 - 0)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{\frac{13}{4}}$$

et $IF = \sqrt{\frac{13}{4}}$ (le triangle est isocèle en I).

$$\begin{aligned} \text{On reprend : } \vec{IE} \cdot \vec{IF} &= IE \times IF \times \cos(\widehat{EIF}) \\ -5/4 &= \sqrt{\frac{13}{4}} \times \sqrt{\frac{13}{4}} \times \cos(\widehat{EIF}) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } -\frac{5}{4} = \frac{13}{4} \times \cos(\widehat{EIF}) \rightarrow \widehat{EIF} = \cos^{-1}\left(\frac{-5/4}{13/4}\right) \approx \boxed{113^\circ}$$

$$\begin{aligned} \text{5) a) on a } \Delta \begin{cases} x = 6 + k \times (-3) \\ y = -3 + k \times 4 \\ z = -1 + k \times 1 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} x = 6 - 3k \\ y = -3 + 4k \\ z = -1 + k \end{cases} \\ \text{point R} &\quad \text{vecteur directeur } \vec{u} \end{aligned}$$

b) le point K doit vérifier l'équation de Δ et l'équation de (BFC) soit

$$\begin{aligned} \text{on résout : } 6 - 3k &= 3 \\ \rightarrow -3k &= -3 \rightarrow \boxed{k=1} \end{aligned}$$

$\begin{cases} x = 6 - 3k \\ y = -3 + 4k \\ z = -1 + k \end{cases}$
et $x = 3$

$$\text{Donc le point K sera } \begin{cases} x = 6 - 3 \times 1 = 3 \\ y = -3 + 4 \times 1 = 1 \\ z = -1 + 1 = 0 \end{cases}$$

↳ on a remplacé k par 1.

c) on vérifie la colinéarité des vecteurs $\vec{KB}$ et $\vec{KC}$ mais cela nous donnera l'alignement des points sans la garantie que K soit bien sur le segment $[BC]$ et non pas à l'extérieur.

Donc il faut un peu "lever le nez" de sa feuille et constater que le point K $(\frac{3}{1}{0})$ se trouve au milieu de $[BC]$!!

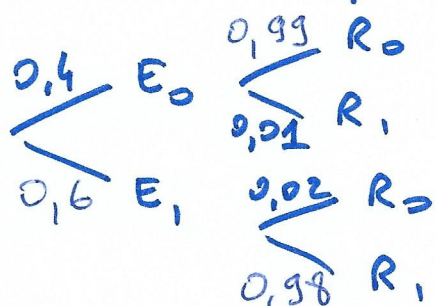
Exercice 4

Les réponses de ce QCM sont:

1 -	(b)
2 -	(c)
3 -	(c)
4 -	(b)
5 -	(d)
6 -	(a)
7 -	(b)

et voici quelques éléments de réponse quand même.

Tout d'abord, l'arbre complété :



1) on a $p(E_0 \cap R_0) = 0,4 \times 0,99 = \boxed{0,396}$

2) avec les proba. totales, on a :

$$\begin{aligned} p(R_0) &= p(E_0 \cap R_0) + p(E_1 \cap R_0) \\ &= 0,4 \times 0,99 + 0,6 \times 0,02 = \boxed{0,408} \end{aligned}$$

3) on a $p_{R_1}(E_0) = \frac{p(R_1 \cap E_0)}{p(R_1)} = \frac{0,4 \times 0,1}{1 - 0,408} \approx \boxed{0,007}$

R_1 est l'événement contraire de R_0 !!

4) erreur de transmission

= on envoie un 0 et on reçoit un 1

ou on envoie un 1 et on reçoit un 0

$$\begin{aligned} \text{soit } & p(E_0 \cap R_1) + p(E_1 \cap R_0) \\ &= 0,4 \times 0,01 + 0,6 \times 0,02 = \boxed{0,016} \end{aligned}$$

5) on a une loi binomiale avec $n = 10$
et $p = 0,88$

$$\hookrightarrow p(X=7) \approx \boxed{0,085} \quad (\text{binom Fdp})$$

6) avec la même loi binomiale,

$$\begin{aligned} \text{on cherche } p(X \geq 1) &= 1 - p(X=0) \\ &= 1 - \binom{10}{0} \times p^0 \times (1-p)^{10} \\ &= 1 - 1 \times 1 \times 0,12^{10} \\ &= \boxed{1 - 0,12^{10}} \end{aligned}$$

7) Le plus simple ici est certainement de tester chaque réponse !

a) on cherche $p(X=\underline{17})$ avec $B(\underline{17}; 0,88)$
soit environ 0,1138

b) on cherche $p(X=\underline{18})$ avec $B(\underline{18}; 0,88)$
soit environ 0,1002

c) on cherche $p(X=\underline{19})$ avec $B(\underline{19}; 0,88)$
soit environ 0,088

d) on cherche $p(X=\underline{20})$ avec $B(\underline{20}; 0,88)$
soit environ 0,078

→ c'est la bonne réponse ici !!