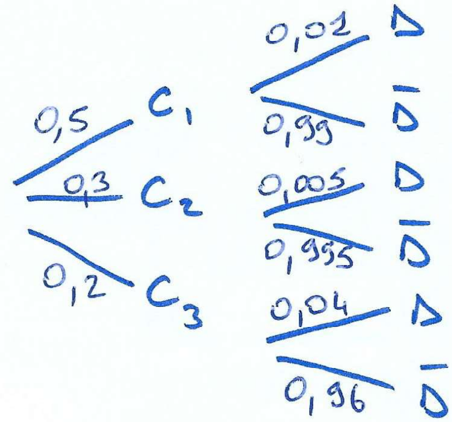
Bac Spé Maths 2022
Voici la correction complète
de l'épreuve 2 de
Amérique du Sud 2022

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1 — Partie A

1) on a l'arbre suivant



pour C_1 : moitié $= 50\% = 0,5$

et pour C_3 : $1 - 0,5 - 0,3 = 0,2$

2) on cherche $p(C_3 \cap D)$

$$= p(C_3) \times p_{C_3}(D) = 0,2 \times 0,04 = \boxed{0,008}$$

3) on cherche $p(D)$ avec la formule des probabilités totales

$$\rightarrow p(D) = p(C_1 \cap D) + p(C_2 \cap D) + p(C_3 \cap D)$$

$$= 0,5 \times 0,01 + 0,3 \times 0,005 + 0,008$$

$$= \boxed{0,0145} \quad \boxed{\text{OK}}$$

4) on cherche "parmi les défectueux" ceux de la chaine

$$C_3 \rightarrow p_D(C_3) = \frac{p(D \cap C_3)}{p(D)} = \frac{0,008}{0,0145} \approx \boxed{0,5517}$$

Partie B

1) a) on a $p(X=3) \approx \boxed{0,0027}$ avec binomFdp, par exemple

b) on a $p(X=0) \approx \boxed{0,7467}$

et donc $p(X \geq 1) = 1 - p(X=0) \approx \boxed{0,2533}$

2) on veut $p(X=0) > 0,85$

et avec $n = 11$, on obtient $p(X=0) \approx \boxed{0,8516} > 0,85$

$\rightarrow$ le directeur a raison ! d'autant plus que si on prend $n = 12$ (soit plus de composants par lot), on obtient $p(X=0) \approx 0,8392 < 0,85$.

Partie C

On a : coût moyen $= 15\,€ \times p(C_1) + 12\,€ \times p(C_2) + 9\,€ \times p(C_3)$

$$= 15 \times 0,5 + 12 \times 0,3 + 9 \times 0,2$$

$$= \boxed{12,9\,€}$$

Exercice 2   Partie A

1) on a $g(1) = 2(1-1) - 1 \times \underbrace{\ln 1}_{=0} = \boxed{0}$

$g(e) = 2(e-1) - e \times \underbrace{\ln e}_{=1} = 2e - 2 - e = \boxed{e-2}$

2) on a $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ (avec les croissances comparées)

et $\lim\limits_{x \to 0} 2(x-1) = -2$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \boxed{-2}$

3) on a $g(x) = 2(x-1) - x\ln x$

$\rightarrow g'(x) = 2 \times 1 - (x \ln x)'$

attention à ce signe "moins" ensuite

$\rightarrow$ pour $(x\ln x)'$, on utilise $(uv)' = u'v + uv'$

avec $u = x \quad v = \ln x$

$u' = 1 \quad v' = \frac{1}{x}$

on obtient : $g'(x) = 2 - \left(1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}\right)$ c'est égal à 1 !

$= 2 - \ln x - 1 = \boxed{1 - \ln x}$ $\boxed{OK}$

On en déduit le tableau :

x	0	1	e	$+\infty$
$g'(x)$	$+$		0	$-$
$g(x)$	$-2 \nearrow$	0	$\nearrow e-2 \searrow$	

on résout $1 - \ln x = 0$

$\rightarrow \ln x = 1$

$\rightarrow \boxed{x = e}$

on indique les éléments connus.

4) Pour éviter de faire le "même" raisonnement en double, je pense que l'on peut admettre que sur $]0;e]$, on a $g(1) = 0$ avec g croissante sur $]0;e]$

Donc 1 solution sur $]0;e]$.

et sur $[e;+\infty[$, on attend le corollaire du TVI.

→ la fonction est continue et strictement décroissante sur $[e;+\infty[$

et on a $g(e) = e-2 \simeq 0{,}7 > 0$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ ← admis par l'énoncé

Donc 0 appartient bien à l'intervalle image $]-\infty; e-2]$ et d'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique sur $[e;+\infty[$, notée α.

→ avec la calculatrice, on a $\boxed{4{,}92 < \alpha < 4{,}93}$

5) En faisant le lien avec les variations du 3), on obtient :

x	0		1		e		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Partie B

1) On a une forme indéterminée pour $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

→ on factorise par x → $f(x) = \underbrace{x}_{+\infty}\Big(\underbrace{3 - \ln x}_{-\infty} - 2\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0}\Big)$

par croissance comparée

→ on a donc une limite du type $(+\infty)\times(-\infty)$

→ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{-\infty}$

2) a) on a $f(x) = 3x - x\ln x - 2\ln x$

soit $f'(x) = 3 - (\ln x + 1) - 2\times\frac{1}{x}$

déjà vu dans la partie A

soit $f'(x) = 2 - \ln x - \frac{2}{x} = \frac{2x - x\ln x - 2}{x} = \boxed{\frac{g(x)}{x}}$

b) sur $]0;+\infty[$, x est positif

Donc $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

On obtient :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	3	↗	$2e-2$	↘	$-\infty$

voir la partie A.

$f(1) = 3\times1 - 1\underbrace{\ln 1}_{=0} - 2\underbrace{\ln 1}_{=0}$

→ $f(1) = 3$

$f(e) = 3e - e\underbrace{\ln e}_{=1} - 2\underbrace{\ln e}_{=1}$
$= 2e-2$

3) on fait juste le tableau de signes de $f''(x)$

x	0		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	0	$-$	
x^2		$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
convexité de f		convexe		concave	

point d'inflexion de coordonnées $(2 ; f(2))$ soit $(2 ; 6-4\ln 2)$

$\boxed{\text{Exercice 3}}$

1) on a $U_{n+1} = 0,9\,U_n + 100$

baisse de 10% donc coefficient multiplicateur égal à $(1 - \frac{10}{100}) = 0,9$

on ajoute 100 individus chaque année

2) on a $U_1 = 0,9 \times U_0 + 100 = 0,9 \times 2000 + 100 = \boxed{1900}$

et $U_2 = 0,9 \times U_1 + 100 = 0,9 \times 1900 + 100 = \boxed{1810}$

3) Init on a $U_0 = 2000$ et $U_1 = 1900$

donc on a bien $1000 < U_1 \leq U_0$ OK

Hérédité on suppose et on part de :

$$1000 < U_{n+1} \leq U_n$$

$0,9 \times 1000 \rightarrow$ $900 < 0,9\,U_{n+1} \leq 0,9\,U_n$ (on a multiplié chaque membre par 0,9)

$900 + 100 \rightarrow$ $1000 < 0,9\,U_{n+1} + 100 \leq 0,9\,U_n + 100$ (on a ajouté 100 !!)

soit $1000 < U_{n+2} \leq U_{n+1}$ OK

4) on a : $U_{n+1} \leq U_n$ donc la suite est décroissante

et $1000 < U_n$ donc la suite est minorée par 1000

→ décroissante et minorée = convergente !!

5) on écrit "nos 3 formules" habituelles

$$U_{n+1} = 0,9\,U_n + 100 \quad (F1)$$
$$V_n = U_n - 1000 \quad (F_2)$$
$$U_n = V_n + 1000 \quad (F_3)$$

a) on part de $V_{n+1} = U_{n+1} - 1000$ (c'est F2)

$$= 0,9\,U_n + 100 - 1000 \quad (\text{avec } F1)$$
$$= 0,9(V_n + 1000) + 100 - 1000 \quad (\text{avec } F3)$$

soit $V_{n+1} = 0,9\,V_n + \underbrace{0,9 \times 1000 + 100 - 1000}_{=0}$

on obtient : $\boxed{V_{n+1} = 0,9\,V_n}$

→ (V_n) est une suite géométrique de raison 0,9

et de premier terme $V_0 = U_0 - 1000$ (avec F2)

$$= 2000 - 1000$$
$$= 1000$$

b) (V_n) est géométrique

Donc $V_n = V_0 \times q^{(n-0)} = 1000 \times 0{,}9^n$

et donc $U_n = V_n + 1000 = 1000 \times 0{,}9^n + 1000$

$= \boxed{1000(0{,}9^n + 1)}$

c) on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$ car $-1 < 0{,}9 < 1$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}9^n + 1) = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \boxed{1000}$

→ à terme, il y aura une population qui s'approchera de 1000 individus.

6) a) on veut résoudre $1000(1 + 0{,}9^n) \leqslant 1020$

soit $1 + 0{,}9^n \leqslant \frac{1020}{1000}$) $= 1{,}02$

soit $0{,}9^n \leqslant 0{,}02 \rightarrow \ln 0{,}9^n \leqslant \ln 0{,}02$

$\rightarrow n \times \ln 0{,}9 \leqslant \ln 0{,}02$

car $\ln 0{,}9$ est négatif $\xrightarrow{\text{inversion}}$ $\rightarrow n \geqslant \frac{\ln 0{,}02}{\ln 0{,}9}$) $\simeq 37{,}1$

→ $\boxed{\text{à partir de 38 donc !}}$

b) c'est un programme très classique qu'il faut savoir compléter "par coeur" !

```
5 while u > 1020
6   u = 0,9*u + 100
7   n = n + 1
8 return n
```

⚠ on aurait pu utiliser $u = 1000(1 + 0{,}9^n)$

MAIS il aurait fallu inverser les lignes 6 et 7 pour une histoire de cohérence des rangs.

Exercice 4

1) a) on a $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l}6-0=6\\4-8=-4\\4-6=-2\end{array}\right.$ et $\overrightarrow{AC}\left|\begin{array}{l}2-0=2\\4-8=-4\\0-6=-6\end{array}\right.$

→ on constate très facilement que les coordonnées ne sont pas proportionnelles → les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires → A, B et C ne sont pas alignés.

b) on a $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-4\\-2\end{pmatrix}=1\times6+2\times(-4)+(-1)\times(-2)=\boxed{0}$

et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-4\\-6\end{pmatrix}=1\times2+2\times(-4)+(-1)\times(-6)=\boxed{0}$

Donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$ → $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

c) avec le vecteur normal $\vec{n}$, on connait le a, b et c de l'équation $ax+by+cz+d=0$

→ on obtient : $1x+2y+(-1)z+d=0$

soit $x+2y-z+d=0$

or $A\in(ABC)$ donc $\underbrace{0}_{x_A}+2\times\underbrace{8}_{y_A}-\underbrace{6}_{z_A}+d=0 \rightarrow d=-10$

on obtient finalement : $\boxed{x+2y-z-10=0}$

2) a) on a $\overrightarrow{DE}\left(\begin{array}{l}6-0=6\\6-0=6\\0-6=-6\end{array}\right.$

Donc on aura pour la droite (DE) $\left\{\begin{array}{l}x=\underbrace{0}_{\text{point } D}+\underbrace{6}_{\text{vecteur } \overrightarrow{DE}}k=6k\\y=0+6k=6k\\z=6-6k=6-6k\end{array}\right.$

b) les coordonnées du point I sont :

$\left\{\begin{array}{l}x_I=\dfrac{x_B+x_C}{2}=\dfrac{6+2}{2}=4\\y_I=\ldots=\dfrac{4+4}{2}=4\\z_I=\ldots=\dfrac{4+0}{2}=2\end{array}\right.$

et pour que $I\in(DE)$, il faut trouver un coefficient k tel que $\left\{\begin{array}{l}6k=4\\6k=4\\6-6k=2\end{array}\right.$

le point I

la droite (DE)

→ c'est bon avec $k=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$!

3) a) on va calculer les 3 longueurs AB, AC et BC.
→ on fait trois fois la "même" chose mais faites le <u>avec soin</u> !

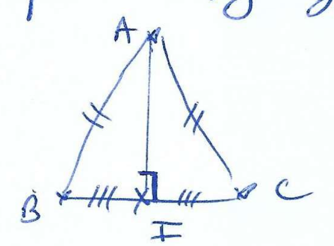
$$AB = \sqrt{(6-0)^2+(4-8)^2+(4-6)^2} = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56}$$

$$AC = \sqrt{(2-0)^2+(4-8)^2+(0-6)^2} = \sqrt{4+16+36} = \sqrt{56}$$

$$BC = \sqrt{(2-6)^2+(4-4)^2+(0-4)^2} = \sqrt{16+0+16} = \sqrt{32}$$

→ on a AB = AC → triangle isocèle en A
On voit rapidement que le triangle n'est pas rectangle
(se souvenir de la réciproque de la propriété de Pythagore)

b) Le triangle ABC est isocèle en A
et I est le milieu de [BC] →
→ la médiane (AI) est également
la <u>hauteur</u> issue du point A



On a : $\text{Aire}_{ABC} = \dfrac{\text{Base} \times \text{Hauteur associée}}{2} = \dfrac{BC \times AI}{2}$

Donc on calcule $AI = \sqrt{(4-0)^2+(4-8)^2+(2-6)^2} = \sqrt{48}$

et $\text{Aire}_{ABC} = \dfrac{BC \times AI}{2} = \dfrac{\sqrt{32} \times \sqrt{48}}{2} = \boxed{8\sqrt{6}}$

c) on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-4\\-2\end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-4\\-6\end{pmatrix} = 6\times 2 + (-4)\times(-4) + (-2)\times(-6) = \boxed{40}$

d) on fait le lien avec la formule utilisant $\boxed{\cos}$!

→ on a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 40 = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

→ $40 = \sqrt{56} \times \sqrt{56} \times \cos(\widehat{BAC})$

→ $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{40}{\sqrt{56}\times\sqrt{56}}$ → $\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\dfrac{40}{\sqrt{56}\times\sqrt{56}}\right)$

→ $\widehat{BAC} \approx \boxed{44{,}4°}$

4) on doit montrer que $\overrightarrow{OH} \perp (ABC)$ et que le point H appartienne bien au plan (ABC).

* pour $\overrightarrow{OH} \perp (ABC)$, on peut utiliser le vecteur normal $\vec{n}$ de la question 1). On a $\overrightarrow{OH} \begin{pmatrix} 5/3 - 0 = 5/3 \\ 10/3 - 0 = 10/3 \\ -5/3 - 0 = -5/3 \end{pmatrix} = \frac{5}{3} \times \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{OH}$ est colinéaire à $\vec{n}$. Donc $\overrightarrow{OH} \perp (ABC)$.

* pour $H \in (ABC)$, on utilise l'équation du plan.

On a : $\underbrace{\frac{5}{3}}_{x_H} + 2 \times \underbrace{\frac{10}{3}}_{y_H} - (\underbrace{-\frac{5}{3}}_{z_H}) - 10 = \boxed{0}$ donc $H \in (ABC)$.

Donc H est bien le projeté orthogonal de O sur (ABC).

Donc la distance de O à (ABC) est égale à OH !

soit $OH = \sqrt{\left(\frac{5}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{10}{3} - 0\right)^2 + \left(-\frac{5}{3} - 0\right)^2} = \boxed{\sqrt{\frac{150}{9}}}$

ou $\boxed{\frac{5\sqrt{6}}{3}}$