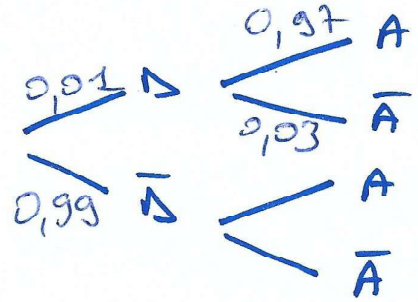
Bac Spé Maths 2022
Voici la correction complète
de l'épreuve 1 de
Amérique du Sud 2022

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1 — Partie A

1) dans l'énoncé, on nous donne $p_D(A) = 0,97$

donc on a l'arbre suivant :



et $p(A) = 0,01465$

2) a) on a $p(D \cap A) = p(D) \times p_D(A) = 0,01 \times 0,97$

$= \boxed{0,0097}$

b) on a $p_A(D) = \dfrac{p(A \cap D)}{p(A)} = \dfrac{0,0097}{0,01465} \approx \boxed{0,662}$

3) on cherche $p_{\bar{D}}(A) = \dfrac{p(\bar{D} \cap A)}{p(\bar{D})}$

et on va trouver $p(\bar{D} \cap A)$ à l'aide de la formule des probabilités totales.

$$p(A) = p(D \cap A) + p(\bar{D} \cap A)$$

soit $0,01465 = 0,0097 + p(\bar{D} \cap A)$

on en déduit : $p(\bar{D} \cap A) = 0,01465 - 0,0097$

$= 0,00495$

et donc $p_{\bar{D}}(A) = \dfrac{0,00495}{0,99} = 0,005$

4) La probabilité cherchée correspond à :

$$p(D \cap \bar{A}) + p(\bar{D} \cap A)$$

$= 0,01 \times 0,03 + 0,00495$

$= 0,00525 < 0,01 \rightarrow \boxed{\text{OK}}$

Partie B

1) on considère que l'on a ici des épreuves identiques et indépendantes avec 2 issues possibles (les évènements S et $\bar{S}$) → loi binomiale avec $p = p(S) = 0{,}00525$ et $n = 5$.

2) on a $p(X=1) \approx \boxed{0{,}0257}$ → avec binomFdp

3) on cherche $p(X \geq 1) = 1 - p(X=0)$ → avec binomFdp à nouveau.

$\approx \boxed{0{,}0260}$

Partie C

on cherche n tel que $p(X \geq 1) > 0{,}07$

avec $p(X \geq 1) = 1 - p(X=0)$

$$= 1 - \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} \times \underbrace{p^0}_{=1} \times \underbrace{(1-p)^{n-0}}_{=0{,}99475^n}$$

↳ on veut résoudre

$$1 - 0{,}99475^n > 0{,}07$$

soit $0{,}99475^n < 0{,}93$

soit $\ln 0{,}99475^n < \ln 0{,}93$

soit $n \times \ln 0{,}99475 < \ln 0{,}93$

soit $n > \dfrac{\ln 0{,}93}{\ln 0{,}99475}$

inversion car $\ln 0{,}99475$ est négatif !

avec $\dfrac{\ln 0{,}93}{\ln 0{,}99475} \approx 13{,}8$

Donc $\boxed{\text{à partir de } n = 14}$!

Exercice 2

1) a) $U_1 = \frac{1}{5} \times U_0^2 = \frac{1}{5} \times 4^2 = \boxed{\frac{16}{5}}$ $U_2 = \frac{1}{5} \times U_1^2 = \frac{1}{5} \times \left(\frac{16}{5}\right)^2 = \boxed{\frac{256}{125}}$

b) on a :

```
def suite_u(p):
    u = 4          qui correspond à U0
    for i in range(1, p+1):
        u = (1/5)*u*u
    return u
```

à apprendre par cœur pour obtenir U_p

2) a) Init on a $U_0 = 4$ → on a bien $0 < U_0 \leq 4$ $\boxed{\text{OK}}$

Hérédité on suppose et on part de :

$0 \leq U_n \leq 4$

0^2 4^2

$\rightarrow 0 < U_n^2 \leq 16$

$\rightarrow \frac{1}{5} \times 0 < \frac{1}{5} \times U_n^2 \leq \frac{1}{5} \times 16$

$\rightarrow 0 < U_{n+1} \leq 3{,}2 \ (\leq 4)$ $\boxed{\text{OK}}$

b) on calcule $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{5} U_n^2 - U_n = U_n\left(\frac{1}{5} U_n - 1\right)$

or $U_n \leq 4 \rightarrow \frac{1}{5} U_n \leq \frac{4}{5} \rightarrow \frac{1}{5} U_n - 1 \leq \frac{4}{5} - 1 < 0$!!

donc $U_{n+1} - U_n < 0$ et (U_n) est $\boxed{\text{décroissante}}$

c) (U_n) est donc une suite décroissante et minorée par 0 → elle $\boxed{\text{converge}}$.

3) a) on a $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f : x \rightarrow f(x) = \frac{1}{5} x^2$.

f est une fonction continue (sur $\mathbb{R}$)

et puisque $U_{n+1} = f(U_n)$, on a bien $\boxed{\ell = f(\ell)}$

b) on résout $\ell = f(\ell)$

soit $\ell = \frac{1}{5} \ell^2 \rightarrow \ell - \frac{1}{5} \ell^2 = 0$

$\rightarrow \ell\left(1 - \frac{1}{5}\ell\right) = 0$

$\boxed{\ell = 0}$ c'est la seule limite possible car $0 < U_n \leq 4$

ou $1 - \frac{1}{5}\ell = 0$ impossible ici

soit $\ell = 5$

4) a) on a $V_{n+1} = \ln(U_{n+1}) = \ln\left(\frac{1}{5}U_n^2\right)$

soit $V_{n+1} = \underbrace{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}_{\ln 1 - \ln 5 \,=\, 0} + \underbrace{\ln\left(U_n^2\right)}_{2\ln U_n} = -\ln 5 + 2\ln U_n$

$\rightarrow \boxed{V_{n+1} = -\ln 5 + 2V_n}$

b) on part de : $W_{n+1} = V_{n+1} - \ln(5)$ car $W_n = V_n - \ln(5)$

$\rightarrow W_{n+1} = -\ln 5 + 2V_n - \ln 5$

$= 2V_n - 2\ln 5 = 2(\underbrace{V_n - \ln 5}_{W_n})$

$\rightarrow$ soit $\boxed{W_{n+1} = 2W_n}$

(W_n) est bien une suite géométrique de raison 2

c) on a $W_0 = V_0 - \ln 5 = \ln(U_0) - \ln 5 = \ln 4 - \ln 5$

soit $W_0 = \ln\left(\frac{4}{5}\right)$

et on a $W_n = W_0 \times q^{(n-0)}$ (formule des suites géo)

$= \boxed{\ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n}$

et alors $V_n = W_n + \ln 5 = \boxed{\ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n + \ln 5}$

5) on a $\ln\left(\frac{4}{5}\right)$ qui est négatif

et $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ ⚠

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n = -\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = -\infty$

or on a $V_n = \ln(U_n)$ soit $U_n = e^{V_n}$

avec $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = -\infty$

Donc on a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \boxed{0}$

Exercice 3 — Partie A

1) on a $g(e) = 1 + e^2(1 - 2\underbrace{\ln(e)}_{=1}) = 1 + e^2(1-2) = 1 - e^2$

or $e^2 > 1$ donc $1 - e^2 < 0$ et $\boxed{g(e) < 0}$

2) on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - 2\ln x) = -\infty$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{x^2(1 - 2\ln x)}_{(+\infty)\times(-\infty)} = -\infty$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

3) a) on a $g(x) = 1 + x^2(1 - 2\ln x)$

$\rightarrow g'(x) = 0 + (x^2(1-2\ln x))'$

et on applique $(u \times v)' = u'v + uv'$

avec $u = x^2$ $\quad v = 1 - 2\ln x$

$u' = 2x$ $\quad v' = -2 \times \frac{1}{x} = -\frac{2}{x}$

soit $g'(x) = 2x(1 - 2\ln x) + x^2 \times \left(-\frac{2}{x}\right)$

$= 2x - 4x\ln x - \underbrace{\frac{2x^2}{x}}_{= -2x\,!!}$ $\rightarrow \boxed{g'(x) = -4x\ln x}$

b) on obtient le tableau suivant :

x	0		1		$+\infty$
$-4x$		$-$		$-$	
$\ln x$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

$g(1) = 1 + 1^2(1 - 2\ln 1) = 2$

d'après le 2)

c) on applique le corollaire du TVI sur $[1 ; +\infty[$.

$\rightarrow$ on a g continue et strictement décroissante sur $[1 ; +\infty[$

on a $g(1) = 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

et 0 appartient bien à l'intervalle image $]-\infty ; 2]$

et donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution sur $[1;+\infty[$

d) on obtient, avec la calculatrice ; $\boxed{1,89 < \alpha < 1,90}$

4) on en déduit sur $[1;+\infty[$

x	1		α		$+\infty$
signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	

en cohérence avec les variations.

Partie B

1) on a $\ln x \geq 0$ sur $[1;\alpha]$

donc $\ln x + 1 \geq 1 > 0$ sur $[1;\alpha]$

et $g''(x) = -4(\ln x + 1) < 0$ sur $[1;\alpha]$

donc g est bien concave sur $[1;\alpha]$

2) a) on cherche $y = ax + b$

avec $a = \dfrac{g(\alpha)-g(1)}{\alpha-1} = \dfrac{0-2}{\alpha-1} = \dfrac{-2}{\alpha-1}$

et pour trouver b, on utilise le point A

soit $y_A = \dfrac{-2}{\alpha-1} \times x_A + b \rightarrow b = 2 + \dfrac{2}{\alpha-1} = \dfrac{2\alpha}{\alpha-1}$

on obtient pour (AB) : $\boxed{y = \dfrac{-2}{\alpha-1}x + \dfrac{2\alpha}{\alpha-1}}$

b) la fonction étant concave sur $[1;\alpha]$, on sait que pour tout x de $[1;\alpha]$, le point correspondant sur la courbe de g sera au dessus de la droite qui relie les points d'abscisse 1 et α, soit (AB).

soit $\underbrace{g(x)}_{\text{la courbe de } g} \geq \underbrace{\dfrac{-2}{\alpha-1}x + \dfrac{2\alpha}{\alpha-1}}_{\text{"au dessus" de la droite (AB)}}$

Exercice 4

1) a) on a $H \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{vmatrix}$ et $G \begin{vmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{vmatrix}$

b) Donc on a $\overrightarrow{HG} \begin{vmatrix} 5-0 \\ 3-3 \\ 2-2 \end{vmatrix} \rightarrow \overrightarrow{HG} \begin{vmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

et on obtient pour (GH) $\begin{cases} x = \underbrace{0}_{\text{point } H} + \underbrace{5}_{\overrightarrow{HG}} \times k \\ y = 3 + 0 \times k \\ z = 2 + 0 \times k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5k \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$

2) a) on a $\overrightarrow{HM} = k\,\overrightarrow{HG}$ soit $\begin{cases} x_M - 0 = k \times 5 \\ y_M - 3 = k \times 0 \\ z_M - 2 = k \times 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_M = 5k \\ y_M = 3 \\ z_M = 2 \end{cases}$

b) on a $\overrightarrow{AM} \begin{vmatrix} 5k - 0 = 5k \\ 3 - 0 = 3 \\ 2 - 0 = 2 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{CM} \begin{vmatrix} 5k - 5 = 5k - 5 \\ 3 - 3 = 0 \\ 2 - 0 = 2 \end{vmatrix}$

et $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM} = 5k \times (5k - 5) + 3 \times 0 + 2 \times 2$
$= \boxed{25k^2 - 25k + 4}$

c) AMC est rectangle en M si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$
soit $25k^2 - 25k + 4 = 0 \rightarrow$ discriminant Δ ...
et on trouve $k_1 = \frac{1}{5} = \boxed{0{,}2}$ ou $k_2 = \frac{4}{5} = \boxed{0{,}8}$
$\in [0;1]$ $\in [0;1]$.

3) a) pour (ACD), on peut utiliser que le vecteur $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal à ce plan ($\rightarrow$ on trouve a, b et c)
et $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in (ACD)$ ($\rightarrow$ on trouve d)
de l'équation $ax + by + cz + d = 0$

Ou on voit directement que (ACD) correspond au plan de la face "du dessous" $\rightarrow \boxed{z = 0}$

b) Le point $K \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient bien à (ACD)
car on a bien $z_K = 0$.

2) il reste à vérifier que $(MK) \perp (ACD)$
et donc que $\vec{MK}$ est $\perp$ à 2 vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ du plan.

→ on a $\vec{MK}\begin{pmatrix}1-1\\3-3\\0-2\end{pmatrix} \cdot \vec{AC}\begin{pmatrix}5-0\\3-0\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix}$

$= 0\times 5 + 0\times 3 + (-2)\times 0 = \boxed{0}$

et $\vec{MK}\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix} \cdot \vec{AD}\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} = 0\times 0 + 0\times 3 + (-2)\times 0 = \boxed{0}$

→ $\boxed{\text{OK}}$

c) $[KM]$ serait alors la hauteur de $MACD$ issue du point M avec le triangle rectangle ACD pour base.

→ $\text{Volume}_{MACD} = \frac{1}{3} \times \text{Aire Base}_{ACD} \times \text{Hauteur}_{MK}$

avec $\text{Aire Base}_{ACD} = (3\times 5) : 2 = 7,5$ (c'est un triangle rectangle)

et $MK = 2$ (c'est évident !)

→ $\text{Volume}_{MACD} = \frac{1}{3} \times 7,5 \times 2 = 5$

4) Si on prend le triangle rectangle AMC pour base, la hauteur associée sera $[DP]$ mais le volume reste inchangé !!

On a : $\text{Volume}_{MACD} = \frac{1}{3} \times \text{Aire Base}_{AMC} \times \text{Hauteur}_{DP} = \boxed{5}$

on a juste "changé" de base et de hauteur.

d'après la question 3

Pour calculer DP, il nous manque juste Aire Base_{AMC} qui est un triangle rectangle en M.

on calcule $AM = \sqrt{(1-0)^2 + (3-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{14}$

$MC = \sqrt{(5-1)^2 + (3-3)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{20}$

on obtient : $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{14} \times \sqrt{20}}{2} \times DP = 5 \rightarrow \frac{\sqrt{280}}{6} \times DP = 5$

c'est l'aire de AMC

→ $DP = \frac{30}{\sqrt{280}} = \frac{15}{\sqrt{70}} \approx 1,79$