# Les fonctions affines : définition , propriétés

## Définition

Une *fonction affine* sera définie par une expression du type $f(x) = ax + b$ , avec $a$ et $b$ nombre réels.
Pour une fonction affine, le nombre $a$ ne peut pas être égal à 0. Si c'est le cas, on n'a pas une fonction affine, mais une *fonction constante*.
Par contre, le nombre $b$ peut lui être nul. On a alors $f(x) = ax$. On parlera alors d'une *fonction linéaire*.

Exemples : $f(x) = 3x - 5$ représente une fonction AFFINE.
$g(x) = -2x + 7$ représente une fonction AFFINE.
$h(x) = 4x$ représente une fonction LINÉAIRE.
$i(x) = 6$ représente une fonction CONSTANTE.

## Représentation graphique d'une fonction affine

***Propriété fondamentale***
La représentation graphique d'une *fonction affine* sera dans tous les cas une ***droite***.

***Définition***
Pour une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ , on dira que l'expression $y = ax + b$ est l'*équation réduite de la droite* représentant cette fonction affine.
On parle donc bien de la même chose , avec $f(x)$ pour la fonction, et $y$ pour la droite.

***Cas particulier de la fonction linéaire***
Dans le cas d'une *fonction linéaire* ( si le nombre $b$ est nul), cette droite *passera par l'origine* du repère.

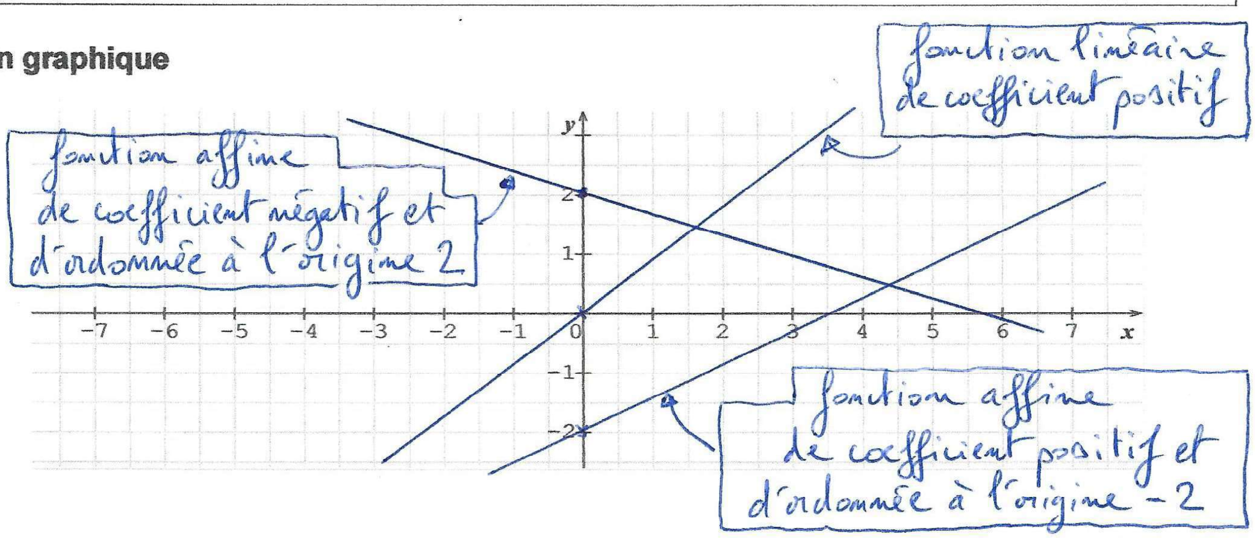
***Définition de l'ordonnée à l'origine***
Si le nombre $b$ n'est pas nul, alors la droite coupe l'axe des ordonnées sur cette valeur $b$ , qui s'appelle alors l'*ordonnée à l'origine*.

## Propriété liée au signe du coefficient *a*

Le nombre $a$ s'appelle *le coefficient de la fonction affine* définie par $f(x) = ax + b$ .
Et pour la droite d'équation $y = ax + b$ , on dira que le nombre $a$ est le *coefficient directeur de la droite*.

Si le coefficient $a$ est *POSITIF*, alors la fonction $f$ est une fonction *CROISSANTE*. La représentation graphique de cette fonction est donc une droite qui "*monte*".
Si le coefficient $a$ est *NEGATIF*, alors la fonction $f$ est une fonction *DECROISSANTE*. La représentation graphique de cette fonction est donc une droite qui "*descend*".

## Bilan graphique



## Comment tracer la droite représentant une fonction affine : avec deux points (on rempace $x$ par deux nombres)

Dans cette fiche, on va (re)voir une *méthode* pour représenter une fonction affine, qui consiste à obtenir ***deux points*** liés à la fonction affine , puis à tracer ***la droite qui passe par ces deux points***.

**Méthode (reprendre éventuellement les fiches de 3e)**

On considère une *fonction affine* définie par $f(x) = ax + b$, dont la représentation graphique est une *droite* ayant pour équation $y = ax + b$. Pour tracer cette droite, on remplace $x$ par deux nombres différents (ce sera ***l'abscisse*** de chacun des deux points) et on calcule l'image de ces nombre par la fonction (on obtient ***l'ordonnée*** des points).

*On rappelle qu'on a le choix de prendre les abscisses $x$ que l'on veut. Mais, une fois le choix fait, les valeurs des ordonnées $y$ seront imposées par le calcul, puisque ce seront les images par la fonction. Du coup, autant choisir des nombres simples, qui permettent des calculs simples.*

**Exemples**

Avec la *fonction affine* définie par $f(x) = 2x - 3$

avec $x = 0$, on a $f(0) = 2\times 0 - 3 = -3$ → point $A(0\,;-3)$

avec $x = 2$, on a $f(2) = 2\times 2 - 3 = 1$ → point $B(2\,;1)$

Avec la *fonction affine* définie par $g(x) = -x + 1$

avec $x = 1$, on a $g(1) = -1 + 1 = 0$ → point $E(1\,;0)$

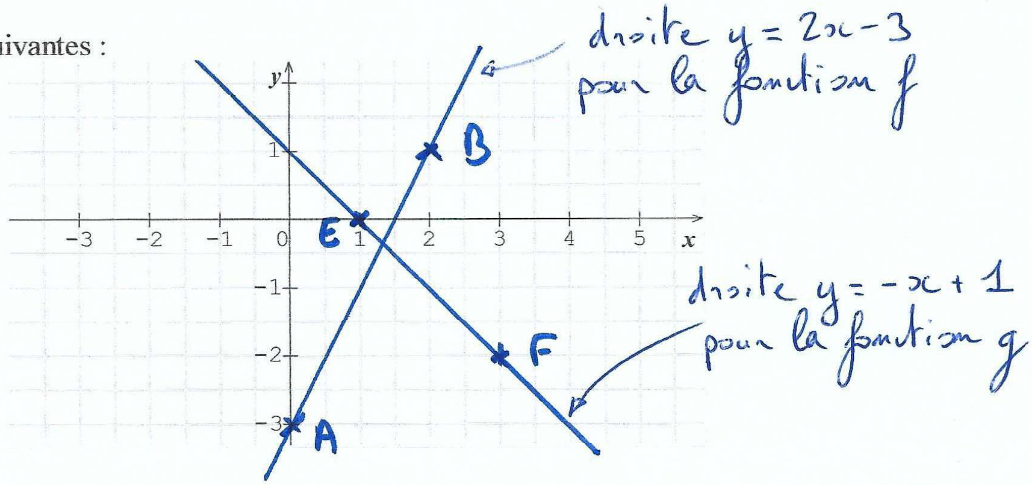
avec $x = 3$, on a $g(3) = -3 + 1 = -2$ → point $F(3\,;-2)$

**→ on a pu prendre l'habitude de "résumer" ces calculs dans des tableaux de valeurs**

| $x$ | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $2\times 0 - 3$ $= -3$ | $2\times 2 - 3$ $= 1$ |
| *points* | $A(0\,;-3)$ | $B(2\,;1)$ |

| $x$ | 1 | 3 |
|---|---|---|
| $g(x)$ | $-1+1$ $=0$ | $-3+1$ $=-2$ |
| *points* | $E(1\,;0)$ | $F(3\,;-2)$ |

On obtient les droites suivantes :



## Comment tracer la droite représentant une fonction affine : la méthode avec l'ordonnée à l'origine et le coefficient

Dans cette fiche, on va (re)voir une *méthode*, pour représenter une fonction affine, qui consiste à directement utiliser le *coefficient a* et l'*ordonnée à l'origine b* de l'expression $f(x) = ax + b$.

**Méthode (reprendre éventuellement les fiches de 3e)**

On considère une *fonction affine* définie par $f(x) = ax + b$, dont la représentation graphique est une *droite* ayant pour équation $y = ax + b$. Pour tracer cette droite :

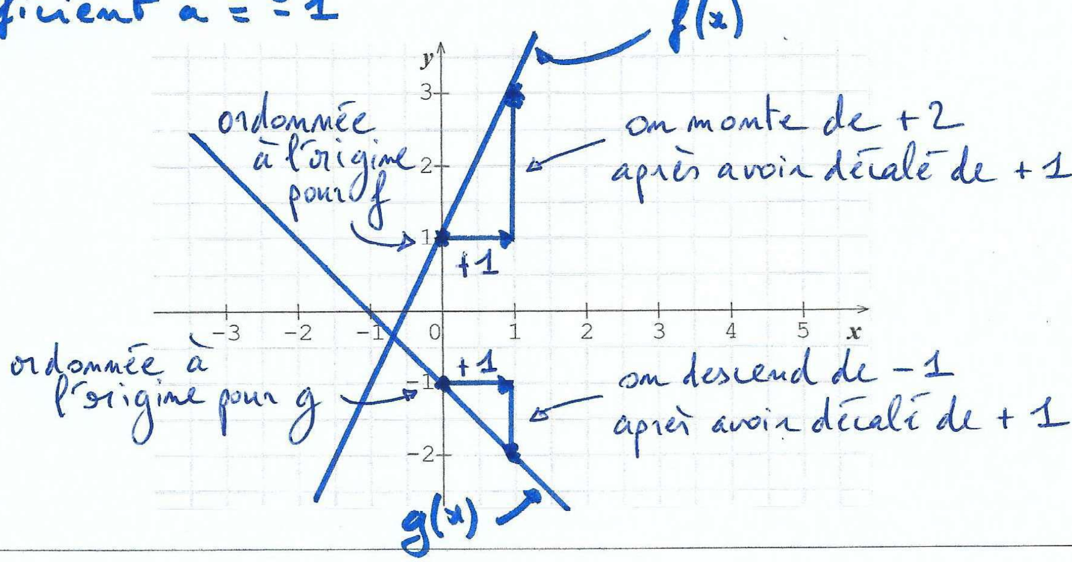
- on utilise le nombre $b$ qui est l'*ordonnée à l'origine.* La droite coupera l'*axe des ordonnées* en $b$.
- on utilise le nombre $a$ qui est le *coefficient* (*directeur*). En partant de l'ordonnée à l'origine, on se décale de +1 sur la ligne horizontale des abscisses , et on monte (ou on descend) suivant la valeur de ce coefficient $a$ (***on monte si le coefficient est positif, on descend s'il est négatif***).

**→ un exemple avec la fonction définie par $f(x) = 2x + 1$**

ordonnée à l'origine b = 1
coefficient a = 2

**→ un exemple avec la fonction définie par $g(x) = -x - 1$**

ordonnée à l'origine b = -1
coefficient a = -1




**Quelques cas particuliers**

Parfois, le coefficient ne permet pas ce travail automatique. On pourra alors utiliser le principe de proportionnalité, qui nous permettra d'avoir des nombres "exploitables".

**→ un exemple avec $f(x) = 0{,}75x - 2$**

en décalant de + 1, il faudrait monter de 0,75 !!
→ on va décaler de + 2, et il faudra donc monter de 1,5.

**→ un exemple avec $f(x) = -\frac{1}{3}x + 4$**

en décalant de + 1, il faudrait descendre de $-\frac{1}{3}$ !!
→ on va décaler de + 3, et il faudra donc descendre de − 1.

# Comment trouver l'expression d'une fonction affine : avec deux nombres et leur image

On cherchera très souvent, en *2nde*, à retrouver l'expression $f(x) = ax + b$ d'une fonction affine.
Pour cela, on aura besoin de connaitre deux couples de valeurs (deux points ou deux images ou ....).
*On a, dans ce chapitre, trois fiches qui vont tenter de balayer l'ensemble des situations rencontrées.*

## Comment bien retranscrire les énoncés

Si l'énoncé vous donne deux nombres et leur image respective (par exemple, $f(1) = 2$ et $f(6) = 22$), alors vous pouvez directement appliquer la méthode suivante !!
Et libre à vous, ensuite, de revenir à cette forme d'écriture, si elle vous convient, pour tous vos exercices.

## Méthode

Elle est à bien suivre et à faire un certain nombre de fois (pour comprendre le rôle de chaque nombre).
La particularité est que les inconnues à trouver sont les nombres *a* et *b* (et non pas *x* comme si souvent !!).

***On considère ici une fonction affine f pour laquelle on sait que $f(1) = 2$ et $f(6) = 22$***

Les images ou les ordonnées sont en haut et les $x$ sont en bas.

*Etape 1 : on calcule le coefficient a*

*La formule pour calculer ce coefficient est* : $a = \dfrac{f(X_b) - f(X_a)}{X_b - X_a} = \dfrac{Y_b - Y_a}{X_b - X_a}$

L'ordre des lettres A et B doit être le même en haut et en bas

on peut écrire : $f(\underbrace{1}_{x_A}) = \underbrace{2}_{y_A}$ et $f(\underbrace{6}_{x_B}) = \underbrace{22}_{y_B}$

on calcule : $a = \dfrac{\overset{y_B}{22} - \overset{y_A}{2}}{\underset{x_B}{6} - \underset{x_A}{1}} = \dfrac{20}{5} = 4 \rightarrow a = 4$

*Etape 2 : on calcule la valeur du nombre b*

$a = 4 \rightarrow$ la fonction peut donc s'écrire $f(x) = 4x + b$
et, avec le point A, on sait qu'en remplaçant $x$ par 1, on obtient une image égale à 2.
On écrit alors : $\underset{f(x_A)}{2} = 4 \times \underset{x_A}{1} + b$

$\rightarrow$ on résout : $2 = 4 + b \rightarrow b = 2 - 4 = -2$

*Conclusion :*

On obtient $a = 4$ et $b = -2 \rightarrow f(x) = \underbrace{4}_{a}x \underbrace{-2}_{b}$

**Remarque** : dans l'étape 2, on a utilisé les valeurs concernant le "point A". N'hésitez pas à vérifier que l'on aurait obtenu le même résultat pour *b* si on avait utilisé les valeurs du "point B".

Comment trouver l'expression d'une fonction affine :
avec les coordonnées de deux points

On cherchera très souvent, en *2nde*, à retrouver l'expression $f(x) = ax + b$ d'une fonction affine.
Pour cela, on aura besoin de connaitre deux couples de valeurs (deux points ou deux images ou ....).
*On a, dans ce chapitre, trois fiches qui vont tenter de balayer l'ensemble des situations rencontrées.*

### Comment bien retranscrire les énoncés

Si l'énoncé vous donne deux points avec leurs coordonnées (par exemple, A ( - 3 ; 9 ) et B ( 2 ; - 1 )), alors vous pouvez directement appliquer la méthode suivante !!
Et libre à vous, ensuite, de revenir à cette forme d'écriture, si elle vous convient, pour tous vos exercices

### Méthode

Elle est à bien suivre et à faire un certain nombre de fois (pour comprendre le rôle de chaque nombre).
La particularité est que les inconnues à trouver sont les nombres *a* et *b* (et non pas *x* comme si souvent !!).

***On considère une fonction affine f dont la droite passe par les deux points A ( - 3 ; 9 ) et B ( 2 ; - 1 )***

Les images ou les ordonnées sont en haut
et les $x$ sont en bas

*Etape 1 : on calcule le coefficient a*

*La formule pour calculer ce coefficient est :* $a = \dfrac{f(Xb) - f(Xa)}{Xb - Xa} = \dfrac{Yb - Ya}{Xb - Xa}$

L'ordre des lettres A et B doit être
le même en haut et en bas.

on peut écrire : $A(\underbrace{-3}_{x_A} ; \underbrace{9}_{y_A})$ et $B(\underbrace{2}_{x_B} ; \underbrace{-1}_{y_B})$

on calcule : $a = \dfrac{\overset{y_B}{-1} - \overset{y_A}{9}}{\underset{x_B}{2} - (\underset{x_A}{-3})} = \dfrac{-10}{5} = -2 \rightarrow a = -2$

*Etape 2 : on calcule la valeur du nombre b*

$a = -2 \rightarrow$ la fonction peut donc s'écrire $f(x) = -2x + b$
et, avec le point A, on sait qu'en remplaçant $x$ par $-3$,
on obtient une image égale à 9.
on écrit alors : $\underset{f(x_A) \text{ ou } y_A}{9} = -2 \times (\underset{x_A}{-3}) + b$

$\rightarrow$ on résout : $9 = 6 + b \rightarrow b = 9 - 6 = 3$

*Conclusion :*

On obtient $a = -2$ et $b = 3 \rightarrow f(x) = \underbrace{-2}_{a}x + \underbrace{3}_{b}$

**Remarque** : dans l'étape 2, on a utilisé les valeurs concernant le "point A". N'hésitez pas à vérifier que l'on aurait obtenu le même résultat pour *b* si on avait utilisé les valeurs du "point B".

# Comment trouver l'expression d'une fonction affine : avec la droite tracée dans un repère

On cherchera très souvent, en *2nde*, à retrouver l'expression $f(x) = ax + b$ d'une fonction affine.
Pour cela, on aura besoin de connaitre deux couples de valeurs (deux points ou deux images ou ....).
*On a, dans ce chapitre, trois fiches qui vont tenter de balayer l'ensemble des situations rencontrées.*

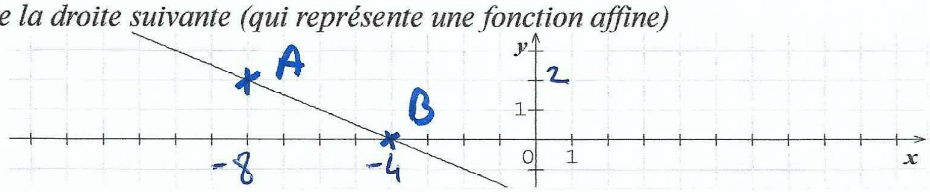
### Comment bien retranscrire les énoncés

Si l'énoncé vous donne directement la droite, il faut visualiser deux points sur cette droite et bien indiquer leurs coordonnées sur votre feuille. Et vous pouvez directement appliquer la méthode suivante !!

### Méthode

Elle est à bien suivre et à faire un certain nombre de fois (pour comprendre le rôle de chaque nombre).
La particularité est que les inconnues à trouver sont les nombres *a* et *b* (et non pas *x* comme si souvent !!).

*On nous donne la droite suivante (qui représente une fonction affine)*




*Etape préliminaire : on trouve deux points sur ce graphique*

On a pris A(-8 ; 2) et B(-4 ; 0)

*Etape 1 : on calcule le coefficient a*

Les images ou les ordonnées sont en haut et les x sont en bas

*La formule pour calculer ce coefficient est :* $a = \dfrac{f(Xb) - f(Xa)}{Xb - Xa} = \dfrac{Yb - Ya}{Xb - Xa}$

L'ordre des lettres A et B doit être le même en haut et en bas.

On calcule : $a = \dfrac{\overset{y_B}{0} - \overset{y_A}{2}}{\underset{x_B}{-4} - \underset{x_A}{(-8)}} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2} = -0,5$

*Etape 2 : on calcule la valeur du nombre b*

$a = -0,5$ → la fonction peut donc s'écrire $f(x) = -0,5x + b$, et, avec le point A, on sait qu'en remplaçant $x$ par $-8$, on obtient une image égale à 2.

On écrit alors : $\underset{f(x_A) \text{ ou } y_A}{2} = -0,5 \times \underset{x_A}{(-8)} + b$

→ On résout : $2 = 4 + b$ → $b = 2 - 4 = -2$

*Conclusion :*

On obtient $a = -0,5$ et $b = -2$ → $f(x) = \underbrace{-0,5}_{a}x \underbrace{-2}_{b}$

**Remarque** : dans l'étape 2, on a utilisé les valeurs concernant le "point A". N'hésitez pas à vérifier que l'on aurait obtenu le même résultat pour *b* si on avait utilisé les valeurs du "point B".

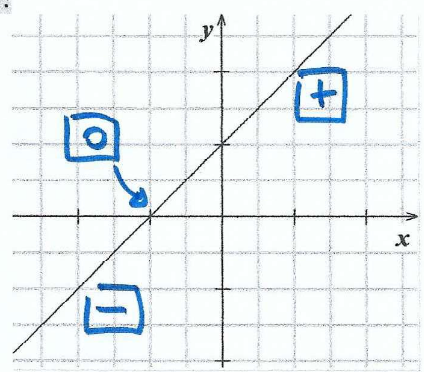
# Comment faire le tableau de signes d'une fonction affine : la méthode

C'est un *résultat fondamental* de la classe de Seconde (*ce qui ne veut pas dire que c'est compliqué*).
En sachant que parmi toutes les fonctions affines que vous rencontrerez en mathématiques , il y a **DEUX** et **uniquement DEUX** possibilités de tableau de signes !!

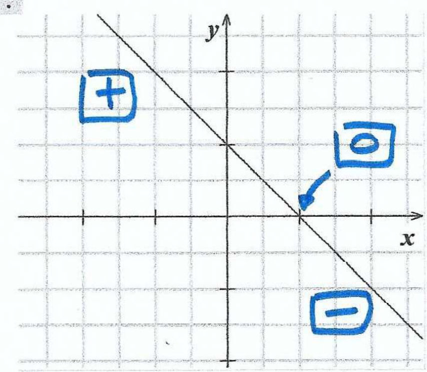
## Lien entre fonctions affines et droites

On va se rappeler que la représentation graphique d'une fonction affine est une droite.
Cela va nous aider à bien visualiser et à nous souvenir du tableau de signes de ce type de fonctions.

*Si le coefficient **a** de la fonction affine est positif (a > 0), alors la droite est croissante, elle "monte".*




*Si le coefficient **a** de la fonction affine est négatif (a < 0), alors la droite est décroissante, elle "descend".*




**Conclusion : on aura donc bien deux possibilités de tableau de signes .**
**→ soit un tableau de signes du type - 0 +**
**→ soit un tableau de signes du type + 0 -**

## Comment trouver la valeur de *x* qui annule la fonction

Vous avez deux méthodes pour cela :
→ soit vous résolvez, pour chaque situation, l'équation $ax + b = 0$ , en sachant que ce sera très facile avec la fonction affine écrite avec des "vrais" nombres.

→ soit vous préférez miser sur le "par coeur" et apprendre que la solution de cette équation s'écrit $-\frac{b}{a}$.

*Personnellement, je vous conseille la première méthode qui évite de se surcharger la mémoire avec une formule en plus. Retenez juste qu'il faut résoudre une équation !*

## Voici donc les deux possibilités de tableaux de signes

***→ si le coefficient a de la fonction affine est POSITIF (soit a > 0 )***

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *Signes de a x + b* | | − | 0 | + | |

avec $\boxed{a}$ positif.

***→ si le coefficient a de la fonction affine est NEGATIF (soit a < 0 )***

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *Signes de a x + b* | | + | 0 | − | |

avec $\boxed{a}$ négatif.

## Comment faire le tableau de signes d'une fonction affine : les exemples

**Exemple 1** : avec une fonction affine définie par $f(x) = 2x - 6$

On résout $2x - 6 = 0 \to 2x = 6 \to x = \frac{6}{2} = 3$

| $x$ | $-\infty$ | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *Signes de* $2x - 6$ | | $-$ | 0 | $+$ | |

Le coefficient 2 est positif
→ tableau du type $(-\ 0\ +)$

**Exemple 2** : avec une fonction affine définie par $f(x) = 4x + 8$

On résout $4x + 8 = 0 \to 4x = -8 \to x = \frac{-8}{4} = -2$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *Signes de* $4x + 8$ | | $-$ | 0 | $+$ | |

Le coefficient 4 est positif
→ tableau du type $(-\ 0\ +)$

**Exemple 3** : avec une fonction affine définie par $f(x) = -3x + 15$

On résout $-3x + 15 = 0 \to -3x = -15 \to x = \frac{-15}{-3} = 5$

| $x$ | $-\infty$ | | 5 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *Signes de* $-3x + 15$ | | $+$ | 0 | $-$ | |

Le coefficient $-3$ est négatif
→ tableau du type $(+\ 0\ -)$.

**Exemple 4** : avec le cas particulier d'une fonction linéaire définie par $f(x) = -6x$

On résout $-6x = 0 \to x = \frac{0}{-6} = 0$

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *Signes de* $-6x$ | | $+$ | 0 | $-$ | |

Le coefficient $-6$ est négatif
→ tableau du type $(+\ 0\ -)$

# Comment faire le tableau de signes d'un produit de fonctions affines

**La méthode**

**Etape 1** : on détermine les nombres qui annulent chacune des fonctions affines (on résout les équations $ax + b = 0$ ou on applique la formule $\frac{-b}{a}$ ).

**Etape 2** : on place ces solutions sur la ligne des $x$ et, **surtout**, on respecte l'ordre **croissant** . On trace alors des "lignes verticales" qui vont créer les "cases" du tableau.

**Etape 3** : on complète les différentes cases en mettant les signes de chacune des fonctions affines.

**Etape 4** : chaque signe du bilan s'obtient en respectant la *règle des signes du produit de deux nombres* !!

**Un exemple détaillé avec la fonction définie par $f(x) = (4x - 12)(-2x - 4)$.**

Etape 1 : on commence en résolvant les équations.

On résout : $4x - 12 = 0$ et $-2x - 4 = 0$

$4x = 12$ $\qquad$ $-2x = 4$

$x = \frac{12}{4} = 3$ $\qquad$ $x = \frac{4}{-2} = -2$

Etape 2 : on complète la ligne des $x$ et on crée les "cases".

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Signes de 4 x - 12* | | | \| | | 0 | | |
| *Signes de - 2 x – 4* | | | 0 | | \| | | |
| *Bilan du produit : signes de ( 4 x – 12 )( - 2 x – 4 )* | | | \| | | \| | | |

Etape 3 : on applique le cours en complètant le signe de chaque fonction affine.

***Vous ferez bien attention au coefficient a de chaque fonction. Et il est tout à fait normal d'avoir deux cases consécutives avec le même signe. Par contre, dès qu'on passe par 0, alors on change de signe.***

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Signes de 4 x - 12* | | $-$ | \| | $-$ | 0 | $+$ | |
| *Signes de - 2 x – 4* | | $+$ | 0 | $-$ | \| | $-$ | |
| *Bilan du produit : signes de ( 4 x – 12 )( - 2 x – 4 )* | | | \| | | \| | | |

Le coefficient 4 est positif → tableau du type ( − 0 + )

Le coefficient −2 est négatif → tableau du type ( + 0 − )

Etape 4 : on applique la règle des signes d'un produit de deux nombres.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Signes de 4 x - 12* | | $-$ | \| | $-$ | 0 | $+$ | |
| *Signes de - 2 x – 4* | | $+$ | 0 | $-$ | \| | $-$ | |
| *Bilan du produit : signes de ( 4 x – 12 )( - 2 x – 4 )* | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

on se rappelle " $\boxed{-} \times \boxed{+} = \boxed{-}$ ".

On peut donc dire que la fonction $f$ est ***positive*** sur $[-2 ; 3]$ et ***négative*** sur $]-\infty ; -2] \cup [3 ; +\infty[$ .

# Comment faire le tableau de signes d'un quotient de fonctions affines

On va donner le tableau de signes de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{(x-2)(-4x-12)}{x+4}$ .

## Un rappel fondamental concernant les valeurs interdites

Tout de suite, il faut rappeller qu'il est impossible de diviser une quantité par 0. Donc, le dénominateur d'un quotient ne doit pas être égal à 0. Il faut alors écarter ce que l'on appelle les "***valeurs interdites***".

> Ici, il faudra que le dénominateur $x+4$ ne soit pas égal à $0$ , c'est à dire que $x$ ne doit pas prendre la valeur $-4$ (qui sera donc la ***valeur interdite***).

## La méthode

La méthode générale va être exactement la même que celle du *produit de fonctions affines* car la règle des signes est la même pour les multiplications et pour les divisions. On fera juste attention au nombre $-4$ qui sera ici une ***valeur interdite***.

> **Etape 1** : on détermine les nombres qui annulent chacune des fonctions affines (on résout les équations $ax + b = 0$ ou on applique la formule $\dfrac{-b}{a}$ ).
> **Etape 2** : on place ces solutions sur la ligne des $x$ et, **surtout**, on respecte l'ordre **croissant** . On trace alors des "lignes verticales" qui vont créer les "cases" du tableau.
> **Etape 3** : on complète les différentes cases en mettant les signes de chacune des fonctions affines.
> **Etape 4** : chaque signe du bilan s'obtient en respectant la *règle des signes du produit ou du quotient de nombres* !! **On ajoutera juste une "double barre" sur la ligne finale pour chaque *valeur interdite*.**

## On donne le tableau de signes de $\dfrac{(x-2)(-4x-12)}{x+4}$ .

On résout les équations :

$x-2=0$ et $-4x-12=0$ et $x+4=0$

$x=2$ ; $-4x=12$ ; $x=-4$

$x=\dfrac{12}{-4}=-3$

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $-3$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Signes de* $x-2$ <br> coefficient 1 positif → tableau du type (− 0 +) | | $-$ | \| | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| *Signes de* $-4x-12$ <br> coefficient −4 négatif → tableau du type (+ 0 −) | | $+$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | \| | $-$ | |
| *Signes de* $x+4$ <br> coefficient 1 positif → tableau du type (− 0 +) | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | \| | $+$ | |
| *Signes de* $\dfrac{(x-2)(-4x-12)}{x+4}$ | | $+$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Avec la règle des signes, il y a 2 négatifs donc le résultat est positif !

$-4$ est une valeur INTERDITE !

## Tableau de signes et résolution d'une inéquation

### Principe général

La question " ***résoudre l'inéquation*** $(5x-10)(-4x-20) \leqslant 0$ " est en fait une question indirrecte. Elle vous amène dans tous les cas à *"**faire le tableau de signes du produit** $(5x-10)(-4x-20)$"*. Une fois que l'on a obtenu la ligne finale du tableau avec les différents signes, il faudra juste conclure en utilisant les intervalles qui vérifieront l'inéquation proposée.

### Exemple 1 : résoudre l'inéquation $(5x-10)(-4x-20) \leqslant 0$

On fait donc le tableau de signes de $(5x-10)(-4x-20)$.

On résout : $5x-10=0$ et $-4x-20=0$

$x=\frac{10}{5}=2$ $\quad$ $x=\frac{20}{-4}=-5$

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Signes de* $(5x-10)$ | | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| *Signes de* $(-4x-20)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | \| | $-$ | |
| *Signes de* $(5x-10)(-4x-20)$ | | $\boxed{-}$ | $0$ | $+$ | $0$ | $\boxed{-}$ | |

on veut $\leq 0$

***Conclusion*** : L'*ensemble solution* sera constitué des intervalles pour lesquels le signe final est ***négatif*** (car on a ici une inéquation avec $\leqslant 0$). Et les crochets doivent être ***fermés*** (sauf sur l'infini, bien sûr) car on souhaite être "*inférieur **ou égal** à zéro*".

L'ensemble solution est : $S = ]-\infty\,;-5] \cup [2\,;+\infty[$

crochets fermés car on peut être "inférieur ou égal..."

### Exemple 2 : résoudre l'inéquation $(-2x+8)(3x+21) > 0$

On fait donc le tableau de signes de $(-2x+8)(3x+21)$.

On résout : $-2x+8=0$ et $3x+21=0$

$x=\frac{-8}{-2}=4$ $\quad$ $x=-\frac{21}{3}=-7$

| $x$ | $-\infty$ | | $-7$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Signes de* $(-2x+8)$ | | $+$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| *Signes de* $(3x+21)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | |
| *Signes de* $(-2x+8)(3x+21)$ | | $-$ | $0$ | $\boxed{+}$ | $0$ | $-$ | |

on veut $>0$

***Conclusion*** : L'*ensemble solution* sera constitué des intervalles pour lesquels le signe final est ***positif*** (car on a ici une inéquation avec $\underline{>0}$ ). Et les crochets doivent être tous **ouverts** car on souhaite être "***supérieur** à zéro*" (sans être égal !!).

L'ensemble solution est : $S = ]-7\,;4[$

crochets ouverts car on ne peut pas être "égal..."

# Tableau de signes et inéquation après une factorisation

En classe de seconde, tant que l'on n'a pas de nouveaux outils mathématiques, toutes les inéquations s'écrivant avec $x^2$, $x^3$ (etc..) ou avec des $x$ au dénominateur devront toujours se ramener à une *inéquation avec juste le nombre 0 à droite*.
Il faudra donc faire toutes les transformations nécessaires (*factoriser, réduire au même dénominateur ..*) pour retrouver des situations traitées dans les fiches précédentes avec la réalisation de tableaux de signes.

## L'énoncé

Résoudre l'inéquation $-4x^2+8x \leqslant 0$

## Le piège à éviter

Attention, si vous commencez votre travail en "faisant passer" le $8x$ pour obtenir $-4x^2 \leqslant -8x$ vous êtes sur une fausse piste et une mauvaise méthode ........

## La méthode

On veut résoudre l'inéquation $-4x^2+8x \leqslant 0$

**Etape 1** : on factorise $-4x^2+8x$ et on obtient $x(-4x+8)$.
**Etape 2** : on fait le tableau de signes de $x(-4x+8)$.
**Etape 3** : on conclut avec l'*ensemble solution* de l'inéquation proposée.

**Etape 1** : on factorise l'expression $-4x^2+8x$

On a : $-4x^2+8x = -4x\boxed{\times x}+8\boxed{\times x}$

$= \boxed{x\times}(-4x+8)$

**Etape 2** : on fait le tableau de signes de l'expression factorisée $x(-4x+8)$

On résout : $x=0$ et $-4x+8=0$

$-4x=-8$

$x=\frac{-8}{-4}=2$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Signes de* $x$ <br> coefficient 1 positif → tableau du type $(-0+)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| *Signes de* $-4x+8$ <br> coefficient $-4$ négatif → tableau du type $(+0-)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| *Signes de* $x(-4x+8)$ | | $\boxed{-}$ | $0$ | $+$ | $0$ | $\boxed{-}$ | |

on veut $\leq 0$

**Etape 3** : on conclut en utilisant le tableau de signes de $x(-4x+8)$ qui est l'expression factorisée de l'expression initiale $-4x^2+8x$, sachant que l'inéquation proposée est "... $\leqslant 0$ ".

L'ensemble solution est : $S=]-\infty;0]\cup[2;+\infty[$

crochets fermés car on peut être "inférieur ou égal.."

# Tableau de signes et inéquation avec quotients et fractions

En classe de seconde, tant que l'on n'a pas de nouveaux outils mathématiques, toutes les inéquations s'écrivant avec $x^2$ , $x^3$ (etc..) ou avec des $x$ au dénominateur devront toujours se ramener à une *inéquation avec juste le nombre 0 à droite*.
Il faudra donc faire toutes les transformations nécessaires (*factoriser, réduire au même dénominateur* .. ) pour retrouver des situations traitées dans les fiches précédentes avec la réalisation de tableaux de signes.

### L'énoncé

Résoudre l'inéquation $\dfrac{x+1}{x-2} < 3$

### Le piège à éviter

Attention, si vous commencez votre travail en faisant un produit en croix ou en "faisant passer" $x-2$ pour obtenir $x+1 < 3(x-2)$, vous êtes sur une fausse piste et une mauvaise méthode ........

### La méthode

On veut résoudre l'inéquation $\dfrac{x+1}{x-2} < 3$

**Etape 1** : on commence en "faisant passer" le 3 à gauche afin de bien avoir le nombre 0 à droite. Et on *réduit au même dénominateur* cette "nouvelle" expression de gauche.
**Etape 2** : on obtient alors un quotient de fonctions affines dont on fait le *tableau de signes*.
**Etape 3** : on conclut avec l'*ensemble solution* de l'inéquation proposée.

***Il ne faudra pas oublier la "double barres" pour le nombre 2 qui est une valeur interdite.***

**Etape 1** : on manipule l'inéquation afin de pouvoir faire un tableau de signes .

On a $\dfrac{x+1}{x-2} < 3 \rightarrow \dfrac{x+1}{x-2} - 3 < 0 \rightarrow \dfrac{x+1}{x-2} - \dfrac{3\times(x-2)}{(x-2)} < 0$

on obtient $\dfrac{x+1-3(x-2)}{(x-2)} < 0$ soit $\dfrac{-2x+7}{x-2} < 0$

( on développe avec $-3$ ! )

**Etape 2** : on fait le tableau de signes du quotient de fonctions affines $\dfrac{-2x+7}{x-2}$ .

On résout $-2x+7=0$ et $x-2=0$

$x = \dfrac{-7}{-2} = \dfrac{7}{2} = 3{,}5$ $\qquad x = 2$

| $x$ | $-\infty$ | | 2 | | 3,5 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signes de $-2x+7$ | | + | \| | + | 0 | − | |
| Signes de $x-2$ | | − | 0 | + | \| | + | |
| Signes de $\dfrac{-2x+7}{x-2}$ | | $\boxed{-}$ | ‖ | + | 0 | $\boxed{-}$ | |

⚠ double barres pour la valeur interdite !

on veut $< 0$

**Etape 3** : on conclut en utilisant le tableau de signes de $\dfrac{-2x+7}{x-2}$, qui est l'expression transformée de l'inéquation initiale avec "... < 0 ", ce qui nous amène à prendre les signes négatifs du tableau.

L'ensemble solution est : $S = ]-\infty ; 2[ \cup ]3{,}5 ; +\infty[$