Le théorème des valeurs intermédiaires (ou T V I)

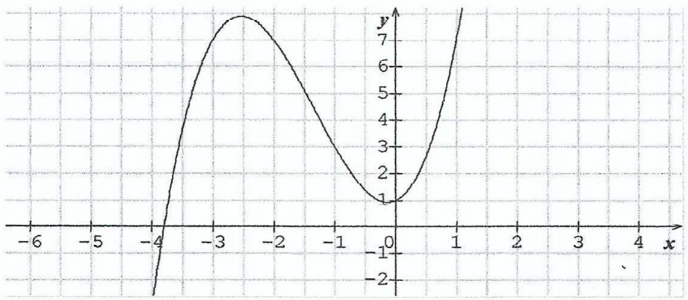
Il va nous permettre de *formaliser* à l'aide d'un *théorème* (et d'une *rédaction type*) un résultat qu'il était possible jusque là d'obtenir avec un graphique ou avec un tableau de variations.

La question à résoudre

Montrer qu'un nombre 5 possède **au moins** un antécédent par une fonction f
c'est à dire
Montrer que l'équation $f(x) = 5$ possède **au moins** une solution.

La vision graphique

On sait déjà répondre à la question posé si on nous donne la courbe et si on nous demande de fournir une réponse graphique.



Sur le graphique ci-dessus, on voit que la fonction "passe" *trois fois* par le nombre 5,
c'est à dire que le nombre 5 possède trois antécédents sur l'intervalle [- 4 ; 3],
c'est à dire que l'équation $f(x) = 5$ possède trois solutions sur l'intervalle [- 4 ; 3].

L'énoncé type

On considère une fonction f définie sur [- 4 ; 3] par $f(x) = x^3 + 4x^2 + x + 1$
On va montrer que l'équation $f(x) = 5$ possède au moins une solution dans l'intervalle [- 4 ; 3]

La solution

Inutile de tracer la courbe, il faut juste calculer les images respectives des nombres – 4 et 3 afin de vérifier que le nombre 5 se trouve bien dans l'intervalle formé par ces deux images.

* La fonction f est continue sur l'intervalle [-4 ; 3].
On calcule : $f(-4) = -3$
$f(3) = 67$ ← 5 est bien compris entre -3 et 67 !

→ le nombre 5 appartient bien à l'intervalle image [-3 ; 67].

* Donc, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, on sait que l'équation $f(x) = 5$ possède au moins une solution dans l'intervalle [-4 ; 3]

Remarque : *Pour ce théorème, inutile d'avoir les variations de la fonction. Cela dit, on sait juste qu'il y a* ***"au moins"*** *une solution. Pour avoir le nombre exact de solutions, il faudra connaitre les variations de la fonction et utiliser le* ***corollaire*** *de ce théorème ! Et c'est disponible sur les fiches suivantes !!*

Comment montrer l'unicité d'une solution
Le corollaire du T V I : la méthode

Le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires* va, cette fois, nous permettre de démontrer qu'une fonction "passe" exactement ***une seule et unique fois*** par une valeur donnée (sur un intervalle donné), *c'est à dire* que l'antécédent par la fonction sera ***unique***,
c'est à dire qu'une équation possèdera une ***unique solution*** !

L'énoncé

On considère une fonction f dont on connait le tableau de variations.

x	2		15
$f(x)$	-4	↗	10

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une *solution unique* dans l'intervalle [2 ; 15].

La solution

* La fonction f est <u>continue et strictement croissante</u> sur l'intervalle $[2;15]$.

On a : $f(2) = -4$ — 0 est bien compris entre -4 et 10.
$f(15) = 10$

→ le nombre 0 appartient bien à l'intervalle image $[-4;10]$.

* Donc, en appliquant le COROLLAIRE du théorème des valeurs intermédiaires, on sait que l'équation $f(x) = 0$ possède une <u>unique solution</u> dans l'intervalle $[2;15]$.

Conséquence

On note souvent cette solution avec la lettre α (alpha) et on peut la placer dans le tableau de variations.

x	2		α		15
$f(x)$	-4	$\boxed{-}$ ↗	0	↗ $\boxed{+}$	10

Et on peut alors en déduire le ***signe de la fonction*** f :
- la fonction f est ***négative*** sur l'intervalle [2 ; α]
- la fonction f est ***positive*** sur l'intervalle [α ; 15]

Comment montrer l'unicité d'une solution
Le corollaire du T V I : un exercice type

Nous allons travailler ici avec une fonction assez simple (c'est un polynôme) mais le travail et la méthode seraient identiques si on travaillait avec des fonctions utilisant l'*exponentielle* ou le *logarithme neperien*.

L'énoncé

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$
Montrer que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution sur $[-10 ; 10]$.

La solution

→ *étape n°1 : on dérive la fonction f pour obtenir les signes de f' et donc les variations de f.*

On a $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$
soit $f'(x) = 3x^2 - 6x$
La dérivée f' a deux racines (0 et 2) que l'on trouve avec le discriminant Δ ou en factorisant $f'(x) = x(3x-6)$

On obtient le tableau suivant, après avoir calculé les différentes images $f(-10)$, $f(0)$, $f(2)$ et $f(10)$:

x	-10		0		2		10
Signes de $f'(x)$							
Variations de $f(x)$	-1299	↗	1	↘	-3	↗	701

→ *étape n°2 : on élimine ici les intervalles dans lesquels il ne peut pas y avoir de solution puis on applique le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires dans l'intervalle où se trouvera la solution.*

* sur $[-10 ; 2]$, le maximum de la fonction est égal à 1
→ l'équation $f(x) = 4$ n'a donc pas de solution sur $[-10 ; 2]$.

* sur $[2 ; 10]$, on applique le COROLLAIRE du TVI
→ la fonction est continue et strictement croissante sur $[2 ; 10]$.

On a : $f(2) = -3$
$f(10) = 701$

4 est bien compris entre -3 et 701 !

et le nombre 4 appartient bien à l'intervalle image $[-3 ; 701]$.
et, d'après le COROLLAIRE du TVI,
l'équation $f(x) = 4$ possède une unique solution sur $[2 ; 10]$.

Utilisation du corollaire du T V I : deux pièges à savoir éviter

Il ne faut pas confondre l'intervalle des antécedents x avec l'intervalle des images

On considère une fonction f dont on connait le tableau de variations.

x	-2		5
$f(x)$			9
	8	$\nearrow$	

L'équation $f(x) = 0$ possède t'elle une *solution unique* ici ?

Le piège ici est qu'il ne faut pas se fixer sur la première ligne du tableau qui concerne les x .
Faire le tableau suivant n'est pas faux MAIS ....

x	-2	0	5
$f(x)$			9
	8	$\nearrow$	

MAIS cela permettrait de placer éventuellement l'image de 0 c'est à dire $f(0)$ et cela ne répondrait pas du tout au problème posé qui est de résoudre l'équation $f(x) = 0$.
Cette équation n'aurait d'ailleurs pas de solution ici car le nombre 0 n'appartient pas à l'intervalle [8;9].

On ne peut pas faire un TVI global : on doit séparer les intervalles

On considère une fonction f dont on connait le tableau de variations.

x	2		10		12		15
$f(x)$			9				8
	7	$\nearrow$		$\searrow$	2	$\nearrow$	

Montrons que l'équation $f(x) = 6$ possède *exactement deux solutions* dans l'intervalle [2 ; 15].

Le théorème des valeurs intermédiaires ne nous permet pas de travailler sur un intervalle à l'intérieur duquel la fonction change de variations.
On doit raisonner en travaillant sur les intervalles séparément :

- *sur [2 ; 10] , il ne peut y avoir de solution à l'équation $f(x) = 6$ car ce nombre 6 n'appartient pas à l'intervalle image [7 ; 9]*
- *sur [10 ; 12] , il y aura une solution (unique pour cet intervalle) et on appliquera le COROLLAIRE du T V I sur cet intervalle [10 ; 12]*
- *sur [12 ; 15] , il y aura une solution (unique pour cet intervalle) et on appliquera le COROLLAIRE du T V I sur cet intervalle [12 ; 15]*

Cela nous donne bien un total de deux solutions mais cela nous oblige à appliquer, pour chacune des solutions, le même raisonnement.

Comment appliquer le théorème des valeurs intermédiaires avec une limite infinie

Le *théorème des valeurs intermédiaires* pourra être appliqué dans le cas d'une *limite en l'infini* (si on a x qui tend vers l'infini) ou dans le cas d'une *limite infinie* (si c'est la fonction f qui tend vers l'infini).
La rédaction de la solution peut paraitre plus compliquée mais, pour autant, c'est exactement le même raisonnement que dans le cas de nombres finis.

L'énoncé

On considère une fonction f dont on connait le tableau de variations.

x	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	7

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une *solution unique* dans l'intervalle $[2 ; +\infty[$.

La solution

* La fonction est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$

On a : $\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 7$

0 est bien compris entre $-\infty$ et 7.

→ le nombre 0 appartient bien à l'intervalle image $]-\infty; 7]$.

* Donc, en appliquant le COROLLAIRE du théorème des valeurs intermédiaires, on sait que l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution dans l'intervalle $[2;+\infty[$.

Recherche de la solution d'une équation avec la calculatrice

Il faut faire ce travail de recherche ***au moins une fois, bien sérieusement,*** tout seul ou avec un professeur, et cela devrait être bien maitrisé pour la suite de l'année !

L'énoncé

On considère la fonction f définie par $f\,(\,x\,) = \ln x - 4 + \dfrac{x}{2}$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
Donner un encadrement (à 0,01 près) de la solution à l'équation $f\,(\,x\,) = 0$.

C'est bien par l'application du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que l'on montrerait que l'équation $f\,(\,x\,) = 0$ possède une unique solution sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.

La méthode

On va prendre, comme exemple, l'utilisation de la Ti 83 Premium . Si vous avez une calculatrice différente, il faudra adapter et mémoriser ce travail avec les touches de votre calculatrice .

On affiche la fonction avec la touche ***f (x)*** .
On utilise ***def table*** pour effectuer les réglages du tableau de valeurs.
On commence avec ***DebutTbl*** égal à 0 (car on cherche ici une solution en partant de 0) et un ***ΔTbl*** égal à 1 (on aura un écart de 1 en 1 pour les valeurs de x).
On utilise la touche ***table*** et on obtient le tableau suivant :

X	Y1
3	-1,401
4	-0,614
5	0,1094
6	0,7918

→ d'après ce tableau, la solution de l'équation $f\,(\,x\,) = 0$ se trouve donc entre 4 et 5.

On poursuit alors avec ***DebutTbl*** égal à 4 et un ***ΔTbl*** égal à 0,1. On obtient :

X	Y1
4,7	-0,102
4,8	-0,031
4,9	0,039
5	0,1094

→ d'après ce tableau, la solution de l'équation $f\,(\,x\,) = 0$ se trouve donc entre 4,8 et 4,9.

On finit alors avec ***DebutTbl*** égal à 4,8 et un ***ΔTbl*** égal à 0,01. On obtient :

X	Y1
4,83	-0,01
4,84	-0,003
4,85	0,004
4,86	0,0110

→ d'après ce tableau, la solution de l'équation $f\,(\,x\,) = 0$ se trouve donc entre 4,84 et 4,85.

Un exercice type du bac avec le corollaire du T V I et une fonction auxiliaire (1)

Nous allons travailler ici avec une fonction assez simple (car il s'agit d'un polynôme) pour calculer la dérivée) mais le travail et la méthode seraient identiques si on travaillait avec des fonctions utilisant l'*exponentielle* ou le *logarithme neperien*.
Le but est de bien mettre en place le travail avec une fonction auxilaire et de bien comprendre la logique du raisonnement général.

L'énoncé

Soit la fonction f définie sur [0 ; 100] par :

$$f(x) = 0{,}0002\,x^5 - 0{,}07\,x^4 + 9{,}4\,x^3 - 509{,}9\,x^2 + 5236\,x + 50\,000$$

Partie A :

On considère la fonction g définie sur [0 ; 100] par .$g(x) = 0{,}001\,x^3 - 0{,}21\,x^2 + 13{,}5\,x - 74{,}8$

1) Etudier les variations de la fonction g .
2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle [0 ; 100] .
3) Donner un encadrement , à 0,01 près, de cette unique solution que l'on notera α.
4) En déduire le tableau de signes de g en fonction de cette solution α.

Partie B :

On va maintenant reprendre la fonction f définie au début de l'exercice.
1) Calculer $f'(x)$ et montrer $f'(x) = (x - 70) \times g(x)$
2) En déduire le tableau de signes de f' et ensuite le tableau de variations de la fonction f (*on utilisera le tableau de signes de g obtenu dans la partie A*).

Le principe de ces exercices est toujours le même :

- on nous donne une fonction au départ que l'on souhaite étudiée mais on se rend compte à un moment donné que l'étude des signes de la dérivée ne peut être faite avec les outils habituels à disposition.
- Cette fonction dérivée doit donc faire l'objet d'une étude à part : c'est à ce moment là que l'on parlera de la fonction auxiliaire qui sera directement égale à la fonction dérivée ou qui s'exprimera en fonction de la fonction dérivée.
- C'est dans l'étude de la fonction auxilaire que l'on utilisera le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires. Il nous permettra de prouver l'existence de solutions pour l'équation f (x) = 0 . Très souvent, on ne pourra pas donner de valeur exate pour cette solution et on la notera α
- L'étude de la fonction auxiliaire se conclut avec son tableau de signes (qui dépendra de α).
  Et après tout s'enchaine :
  on intègre le signe de la fonction auxiliaire dans le tableau de signes de la dérivée f'
  on en déduit les signes de la dérivée f'
  on en déduit alors les variations de la fonction f. Les intervalles s'écriront à l'aide de la valeur de α trouvée dans la première partie .

La solution de la partie A

1) on a $g(x) = 0{,}001x^3 - 0{,}21x^2 + 13{,}5x - 74{,}8$

$\rightarrow g'(x) = 0{,}001 \times 3x^2 - 0{,}21 \times 2x + 13{,}5$

$\rightarrow g'(x) = 0{,}003x^2 - 0{,}42x + 13{,}5$

on cherche les racines de g en calculant le discriminant.

on obtient $\Delta = 0{,}0144 \rightarrow$ 2 racines (50 et 90)

on en déduit le tableau de variations

x	0		50		90		100
$g'(x)$		+	0	−	0	+	
$g(x)$	−74,8	↗	200,2	↘	168,2	↗	175,2

on calcule les images $g(0)$, $g(50)$, $g(90)$ et $g(100)$ avec la calculatrice !

2) L'intervalle $[50\,;100]$ est hors sujet pour l'équation $g(x) = 0$ (minimum égal à 168,2 !)

$\rightarrow$ on applique le corollaire du TVI sur $[0\,;50]$

$\rightarrow$ la fonction est continue et strictement ↗ sur $[0\,;50]$

On a : $g(0) = -74{,}8$

$g(50) = 200{,}2$

0 est bien compris entre −74,8 et 200,2

Le nombre 0 appartient bien à l'intervalle image $[-74{,}8\,;200{,}2]$

Donc, en appliquant le corollaire du TVI,

l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique sur $[0\,;50]$

3) Avec la calculatrice, on obtient : $6{,}10 < \alpha < 6{,}11$

4) En plaçant α dans le tableau de variations, on observe que $g(x)$ est négatif avant α et reste toujours positif après α.

on obtient :

x	0		α		100
signes de $g(x)$		−	0	+	

← la partie A nous sert à obtenir ce tableau !!

La solution de la partie B

On reprend maintenant $f(x)=0{,}0002x^5-0{,}07x^4+9{,}3x^3$
$-509{,}9x^2+5236x+50\,000$

1) on calcule $f'(x)=0{,}0002\times 5x^4-0{,}07\times 4x^3+9{,}3\times 3x^2$
$-509{,}9\times 2x+5236$

soit $f'(x)=0{,}001x^4-0{,}28x^3+27{,}9x^2-1019{,}8x+5236$

Et, pour montrer que $f'(x)=(x-70)\times g(x)$, on va développer l'expression $(x-70)\times g(x)$ et vérifier que l'on obtient bien $f'(x)$.

2) La dérivée f' est donc le produit d'une fonction affine $(x-70)$ et de la fonction g dont on a trouvé le tableau de signes dans la partie A.

On obtient donc : on sait que $\alpha \approx 6{,}1$

	0		α		70		100
signes de $x-70$ (fonction affine		$-$	|	$-$	0	$+$	
signes de $g(x)$ (voir partie A)		$-$	0	$+$	|	$+$	
signes de $f'(x)$ $=(x-70)\times g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Un exercice type du bac avec le corollaire du T V I et une fonction auxiliaire (2)

Nous allons travailler ici avec une fonction assez simple (même si il faut appliquer la formule ($\frac{u}{v}$)' pour calculer la dérivée) mais le travail et la méthode seraient identiques si on travaillait avec des fonctions utilisant l'*exponentielle* ou le *logarithme neperien*.
Le but est de bien mettre en place le travail avec une fonction auxilaire et de bien comprendre la logique du raisonnement général.

L'énoncé

Soit la fonction f définie sur $]-\infty ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^3 + x - 2}{x^2 + 1}$

Partie A :
On considère la fonction g définie sur $]-\infty ; +\infty[$ par .$g(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$
1) Etudier les variations de la fonction g .
2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-\infty ; +\infty[$.
3) Donner un encadrement , à 0,01 près, de cette unique solution que l'on notera α.
4) Donner le tableau de signes de g en fonction de cette solution α.

Partie B :
On va maintenant reprendre la fonction f définie au début de l'exercice.
1) Calculer $f'(x)$ et montrer que que l'on a $f'(x) = \dfrac{(x+1)g(x)}{(x^2+1)^2}$
2) En déduire le tableau de variations de la fonction f (*on utilisera le tableau de signes de g obtenu dans la partie A*).

Le principe de ces exercices est toujours le même :

- *on nous donne une fonction au départ que l'on souhaite étudiée mais on se rend compte à un moment donné que l'étude des signes de la dérivée ne peut être faite avec les outils habituels à disposition.*
- *Cette fonction dérivée doit donc faire l'objet d'une étude à part : c'est à ce moment là que l'on parlera de la fonction auxiliaire qui sera directement égale à la fonction dérivée ou qui s'exprimera en fonction de la fonction dérivée.*
- *C'est dans l'étude de la fonction auxilaire que l'on utilisera le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires. Il nous permettra de prouver l'existence de solutions pour l'équation $f(x) = 0$. Très souvent, on ne pourra pas donner de valeur exate pour cette solution et on la notera α*
- *L'étude de la fonction auxiliaire se conclut avec son tableau de signes (qui dépendra de α). Et après tout s'enchaine :*
  on intègre le signe de la fonction auxiliaire dans le tableau de signes de la dérivée f'
  on en déduit les signes de la dérivée f'
  on en déduit alors les variations de la fonction f . Les intervalles s'écriront à l'aide de la valeur de α trouvée dans la première partie .

La solution de la partie A

1) On a $g(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$

$\longrightarrow \quad g'(x) = 3x^2 - 2x + 3$

On cherche les racines de g' $\longrightarrow$ on utilise le discriminant Δ.

On obtient $\Delta = -28 < 0$ $\longrightarrow$ il n'y a pas de racine et g' a un signe unique (positif ici !).

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

On calcule les limites en factorisant $g(x)$

$\longrightarrow g(x) = x^3\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$

d'où les résultats.

2) c'est le corollaire du TVI !

La fonction est strictement croissante et continue sur $]-\infty\,;+\infty[$.

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

$\longrightarrow$ Le nombre 0 appartient bien à l'intervalle image $]-\infty\,;+\infty[$.

Donc, d'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique dans l'intervalle $]-\infty\,;+\infty[$.

3) Avec la calculatrice, on applique la méthode classique pour trouver : $-0{,}30 < \alpha < -0{,}29$

4) En plaçant α dans le tableau de variations de la question 1, on en déduit le tableau de signes de g

x	$-\infty$		α		$+\infty$
variations de $g(x)$		$\boxed{-}$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $\boxed{+}$	

$\longrightarrow$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
signes de $g(x)$		$-$	0	$+$	

La solution de la partie B

1) On a $f(x) = \dfrac{x^3+x-2}{x^2+1}$ → on utilise $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

On obtient $f'(x) = \dfrac{(3x^2+1)(x^2+1)-(x^3+x-2)\times 2x}{(x^2+1)^2}$

$$= \frac{3x^4+3x^2+x^2+1-2x^4-2x^2+4x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x^4+2x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}$$

Et pour vérifier l'égalité proposée, on développe $(x+1)g(x)$

→ on a $(x+1)g(x) = (x+1)(x^3-x^2+3x+1)$

$$= x^4-\cancel{x^3}+3x^2+x+\cancel{x^3}-x^2+3x+1$$

$$= x^4+2x^2+4x+1$$

On a bien $f'(x) = \dfrac{(x+1)\,g(x)}{(x^2+1)^2}$

2) on obtient donc : pour $(x+1)$ pour $g(x)$

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x^2+1)^2$		$+$	0	$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

on trouverait $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

on trouverait $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$