Bac Spé Maths 2022
Voici la correction complète
de l'épreuve 2
Polynésie 2022

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

$\boxed{\text{Exercice 1}}$ → c'est le QCM.

Les bonnes réponses sont : 1 → a
2 → c
3 → d
4 → c
5 → b
6 → d

Voici quelques explications (même si elles ne sont pas demandées).

<u>Question 1</u> : on a $(x\ln x)' = \underbrace{1\times\ln x}_{u'\times v} + \underbrace{x\times\frac{1}{x}}_{u\times v'}$,

donc on a $f'(x) = \ln x + 1 - 1 = \boxed{\ln x}$

<u>Question 2</u> : on a $g(x) = x^2 - x^2\ln x$

avec $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln x = 0$

soit $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \boxed{0}$

$\ln x$ tend vers $-\infty$ mais on utilise les CROISSANCES COMPARÉES

<u>Question 3</u> : pour un QCM, on peut se contenter d'une lecture graphique MAIS la fonction a été choisie pour la rendre (quasi) impossible.

Donc on pourrait chercher à faire le tableau de variations de f MAIS (décidément) il y a plus simple ici car la fonction se factorise par x !

On a $f(x) = x(x^2 \underbrace{- 0,9x - 0,1}{})$

$\boxed{\text{1 solution}}$ $x = 0$

→ on calcule le discriminant

$\Delta = (-0,9)^2 - 4\times1\times(-0,1)$

$= 1,21 > 0$

→ $\boxed{\text{2 solutions}}$

$\boxed{\text{3 solutions en tout !!}}$

Question 4 : La fonction K est une fonction composée avec $2x$ qui jouerait le rôle de "u".

→ la dérivée de $H(2x)$ correspond à la dérivée de $H(u)$.

on obtient : $H'(u) \times u'$

soit $h(u) \times u'$ ou $h(2x) \times 2$

et donc pour obtenir $k(x) = h(2x)$, il faut partir de $\boxed{\frac{1}{2} H(2x)}$ car en dérivant on obtient bien $\frac{1}{2} \times h(2x) \times 2 = h(2x)$!!

Question 5 : l'équation de la tangente s'écrit :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

avec $f(x) = xe^x \rightarrow f(1) = 1 \times e^1 = e$

et $f'(x) = \underbrace{1 \times e^x}_{e^x} + xe^x \rightarrow f'(1) = e^1 + 1 \times e^1 = e + e = 2e$

on obtient : $y = 2e(x-1) + e$

$= 2ex - 2e + e \rightarrow \boxed{y = 2ex - e}$

Question 6 : puisque c'est un QCM, on peut se contenter de rentrer la suite $(0,2)^n$ dans la calculatrice et d'afficher un tableau de valeurs

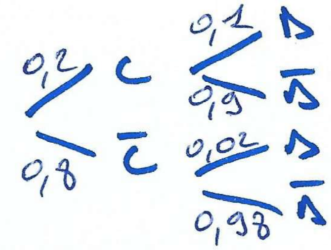
→ on obtient

n	$U_n = 0,2^n$
4	0,0016 ($> 0,001$)
5	0,00032 ($< 0,001$)

↳ à partir du rang 5

soit $\boxed{n \geq 5}$.

Exercice 2



Partie 1 : 1) on a l'arbre pondéré

$\rightarrow p(C \cap D) = 0{,}2 \times 0{,}1 = \boxed{0{,}02}$

2) on utilise la formule des probabilités totales

$\rightarrow p(D) = p(C \cap D) + p(\overline{C} \cap D)$

$= 0{,}02 + 0{,}8 \times 0{,}02 = \boxed{0{,}036}$

3) on cherche $p_D(C) = \dfrac{p(C \cap D)}{p(D)} = \dfrac{0{,}02}{0{,}036} \approx \boxed{0{,}556}$

Partie 2 a) on considère que l'on a des épreuves identiques et indépendantes avec deux issues possibles.

b) L'énoncé parle de "calculer" donc on va utiliser la formule plutôt que binomFdp !!

$p(X=1) = \binom{35}{1} \times p^1 \times (1-p)^{35-1} = 35 \times 0{,}036^1 \times 0{,}964^{34}$

$\approx \boxed{0{,}362}$

c) de même, on calcule $p(X \leq 1)$ plutôt que binomFRep.

$\rightarrow p(X \leq 1) = \underbrace{p(X=0)}_{\binom{35}{0} \times p^0 \times (1-p)^{35} = 1 \times 1 \times 0{,}964^{35}} + \underbrace{p(X=1)}_{0{,}362} \approx \boxed{0{,}639}$

2) on cherche $p(X \geq 1) > 0{,}99$

soit $1 - p(X=0) > 0{,}99$

soit $1 - \binom{n}{0} \times p^0 \times (1-p)^n > 0{,}99$

on obtient : $1 - 0{,}964^n > 0{,}99$

soit $0{,}964^n < 0{,}01$

$\rightarrow \ln 0{,}964^n < \ln 0{,}01$

$\rightarrow n \times \ln 0{,}964 < \ln 0{,}01$

$\rightarrow n > \underbrace{\dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}964}}_{\approx 125{,}6}$

on inverse le symbole car ln 0,964 est un nombre négatif.

$\boxed{\text{à partir de 126 casques}}$

Exercice 3

1) début 2022 → on calcule $U_1 = 0{,}008 \times U_0 (200 - U_0)$

$= 0{,}008 \times 40 \times (200 - 40)$

soit $\boxed{U_1 = 51{,}2}$

2) on résout $f(x) = x$

soit $0{,}008\,x(200 - x) = x$

soit $1{,}6x - 0{,}008x^2 = x$

soit $-0{,}008x^2 + 0{,}6x = 0$

→ on peut calculer le discriminant ou plutôt factoriser par x pour résoudre une équation produit nul.

On obtient : $x(-0{,}008x + 0{,}6) = 0$

soit $\boxed{x = 0}$ ou $-0{,}008x + 0{,}6 = 0$

→ $x = \dfrac{-0{,}6}{-0{,}008} = \boxed{75}$

3) a) on a $f(x) = 1{,}6x - 0{,}008x^2$

soit $f'(x) = 1{,}6 - 0{,}008 \times 2x = 1{,}6 - 0{,}016x$

on résout $1{,}6 - 0{,}016x = 0$ → $x = \dfrac{-1{,}6}{-0{,}016} = 100$

on obtient le tableau suivant :

signe d'une fonction AFFINE → $f'(x)$

x	0		100		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

↳ f est croissante sur $[0\,;100]$

b) on a ici une suite définie à partir d'une fonction.

→ c'est un type de récurrence à bien maîtriser.

On rappelle que le principe est d'appliquer une fonction f croissante qui va <u>conserver</u> l'ordre des inégalités.

<u>Init</u> : on a $U_0 = 40$ et $U_1 = 51{,}2$

Donc on a bien $0 \leq U_0 \leq U_1 \leq 100$

<u>Hérédité</u> on suppose $0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 100$

soit $f(0) \leq f(U_n) \leq f(U_{n+1}) \leq f(100)$

on a $f(0)=0$ et $f(100)=80$ soit $0 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 80 \; (\leq 100)$

OK

c) on a $U_n \leq U_{n+1} \rightarrow (U_n)$ est croissante

on a $U_n \leq 100 \rightarrow (U_n)$ est majorée (par 100)

Donc (U_n) est croissante et majorée $\rightarrow$ elle $\boxed{\text{CONVERGE.}}$

d) On a $U_{n+1} = f(U_n)$

Donc, par passage à la limite (la fonction f est continue), on obtient :

$\ell = f(\ell) \rightarrow$ équation résolue dans la question 2

et parmi les deux solutions 0 et 75, la seule solution cohérente ici est $\boxed{75}$.

4) l'instruction seuil(100) va nous donner la condition while u < 100.

or la suite (U_n) n'a que des termes inférieurs à 100 (et même inférieurs à 75 !!).

Donc la condition while u < 100 sera TOUJOURS vraie et l'algorithme ne pourra jamais s'arrêter.

Exercice 4

On a bien un CUBE ici, même si ce n'est pas visible avec la représentation donnée.

Partie 1 : 1) on a $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

2) on calcule $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-1\\1/2\\1/2\end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}1/2\\0\\1\end{pmatrix} = -1\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{2}\times 1 = \boxed{0}$

et $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-1\\1/2\\1/2\end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = -1\times 1 + \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{2}\times 1 = \boxed{0}$

3) $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-1\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$ est donc un vecteur NORMAL au plan (AIG)

Donc le plan aura pour équation : $-1x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + d = 0$

or $A \in (AIG) \to -1\times 0 + \frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{2}\times 0 + d = 0 \to d = 0$

$\to$ on obtient pour (AIG) : $-x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0$

et en multipliant par (-2)

$\boxed{2x - y - z = 0}$

4) on a (BK) $\begin{cases} x = \boxed{1} + \boxed{(-1)}\,t \\ y = \boxed{0} + \boxed{1/2}\,t \\ z = \boxed{0} + \boxed{1/2}\,t \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = \frac{1}{2}t \\ z = \frac{1}{2}t \end{cases}$

point B   vecteur $\overrightarrow{BK}$

5) le projeté L correspond en fait au point d'intersection de la droite (BK) avec le plan (AIG)

$\to$ on "met" la droite dans l'équation du plan

on obtient : $2(1-t) - (\frac{1}{2}t) - (\frac{1}{2}t) = 0$

soit $-3t + 2 = 0 \to t = \frac{2}{3}$

on obtient donc le point L $\begin{cases} x = 1 - 2/3 = 1/3 \\ y = \frac{1}{2}\times 2/3 = 1/3 \\ z = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = 1/3 \end{cases}$

b) cette distance correspond à BL

$\to$ on calcule $BL = \sqrt{(x_L - x_B)^2 + \cdots\cdots} = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$

Partie 2

cette partie est moins classique et elle nécessite de bonnes connaissances sur les triangles et les tétraèdres.

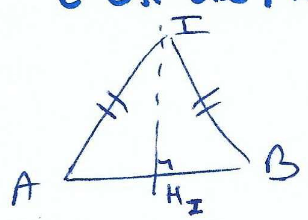
1) a) on peut montrer que $\vec{GF} \perp (AIB)$ en utilisant le produit scalaire et en calculant $\vec{GF} \cdot \vec{AI} = 0$ et $\vec{GF} \cdot \vec{AB} = 0$

ou $\vec{GF}$ est orthogonal à la face ABFE du cube, or le plan (AIB) correspond justement à cette face du "devant" $\to \vec{GF} \perp (AIB)$

Bilan : on a $\vec{GF} \perp (AIB)$ et $F \in (AIB)$ $\to$ [GF] est bien la hauteur relative à la base (AIB)

b) calcul de l'aire du triangle AIB :
c'est un triangle isocèle en I

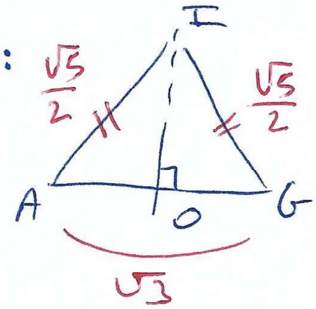
base du triangle
Hauteur associée



$\to \text{Aire}_{AIB} = \frac{AB \times IH_I}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$

On obtient : $\text{Volume}_{ABIG} = \frac{1}{3} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{Aire Base AIG}} \times \underbrace{1}_{\text{Hauteur FG}} = \boxed{\frac{1}{6}}$

2) Le triangle AIG est isocèle en I
Donc la médiane (IO) qui arrive au milieu O du segment [AG] correspond aussi à une hauteur.
On a donc le schéma suivant :



On a : $\text{Aire}_{AIG} = \frac{\overbrace{AG}^{\text{Base}} \times \overbrace{IO}^{\text{Hauteur}}}{2}$

et il faut calculer IO, soit avec la propriété de pythagore, soit avec la formule générale $IO = \sqrt{(x_O - x_I)^2 + \dots\dots}$

→ on obtient $IO = \frac{\sqrt{2}}{2}$

On obtient donc : $\text{Aire}_{AIG} = \frac{\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{4}}$

3) Le volume_{ABIG} peut alors se calculer en prenant le triangle AIG comme base et la hauteur h correspond alors à la distance cherchée du point B au plan (AIG).

→ $\underbrace{\text{Volume}_{ABIG}}_{\frac{1}{6}} = \frac{1}{3} \times \underbrace{\text{Aire}_{AIG}}_{\frac{\sqrt{6}}{4}} \times h$

→ $h = \frac{1/6}{1/3 \times \frac{\sqrt{6}}{4}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{6}}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$