Bac Spé Maths 2022
Voici la correction complète
de l'épreuve 2
Centres Etrangers Afrique 2022

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1 → c'est le QCM.

Les bonnes réponses sont : 1 → c
2 → d
3 → c
4 → b
5 → c
6 → a

Voici quelques explications (même si elles ne sont pas demandées).

Question 1 : on utilise $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{1 \times e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \frac{\cancel{e^x}(1-x)}{(e^x)^{\cancel{2}}} = \frac{1-x}{e^x} = (1-x)e^{-x}$$

on simplifie par e^x

on a $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

Question 2 : avec le signe de f'', on aura les variations de f' et la concavité de f.

x	-3		-1		1
$f''(x)$	0	+	0	−	0
$f'(x)$		↗	Max	↘	
$f''(x)$		convexe		concave	

on a bien un maximum pour f' en $x = -1$

Question 3 : on peut dériver toutes les propositions de $F(x)$ et constater laquelle donne $f(x)$.

ou puisque $(e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2}$, il faudra pouvoir multiplier par un polynôme de degré 2 afin d'obtenir le x^3 de l'expression $f(x)$.

Question 4 :

on factorise $\frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{\cancel{e^x}\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}{\cancel{e^x}\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}$ tend vers 1.

$\frac{1}{e^x} \to 0$

on simplifie par e^x !!

Question 5 :

on a $\left(e^{2x+1}\right)' = 2e^{2x+1}$

Donc $\left(\frac{1}{2}e^{2x+1}\right)' = \frac{1}{2}\times 2e^{2x+1} = e^{2x+1}$

et avec l'expression c, on a bien $F(0) = 1$.

Question 6

La courbe de f semble CONCAVE sur $[-2;1]$
et CONVEXE sur $[1;4]$.

Donc il faut choisir la proposition pour laquelle
on a f'' négative sur $[-2;1]$
et positive sur $[1;4]$.

→ réponse a

Exercice 2

1) en $+\infty$, aucun souci, $\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\to+\infty}\underbrace{\ln x}_{\to+\infty} + 1 = \boxed{+\infty}$

par contre, en 0, on a une forme indéterminée que l'on lève à l'aide des croissances comparées

$\rightarrow$ on sait que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0 \rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \boxed{1}$

2) a) on utilise la formule $(uv)' = u'v + uv'$

$\rightarrow f'(x) = 1\times\ln x + x\times\frac{1}{x} + 0 = \boxed{\ln x + 1}$

b) on résout $\ln x + 1 = 0 \rightarrow \ln x = -1 \rightarrow x = e^{-1}$

on obtient le tableau :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$1-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

on calcule

$f(e^{-1}) = e^{-1}\ln e^{-1} + 1$

$= e^{-1}\times(-1) + 1$

$= 1 - e^{-1} \simeq 0{,}63$

c) on va "zoomer" ce tableau sur la partie $]0;1]$

$\rightarrow$ on aura :

x	0		e^{-1}		1
$f(x)$	1	$\searrow$	$1-e^{-1}$ $(\simeq 0{,}63)$	$\nearrow$	$f(1)=1$

$\rightarrow$ pour tout $x \in]0;1]$, on a bien $f(x) \in]0;1]$

3) a) on aura : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

avec $f(1) = 1\times\underbrace{\ln 1}_{=0} + 1 = 1$

et $f'(2) = \ln 1 + 1 = 1$

on obtient : $y = 1(x-1)+1 \rightarrow \boxed{y = x}$

b) on a $f''(x) = (\ln x + 1)' = \frac{1}{x} \boxed{> 0}$ pour $x \in]0;+\infty[$

Donc f est $\boxed{\text{CONVEXE}}$ sur $]0;+\infty[$.

c) f est CONVEXE donc sa courbe $\mathcal{C}_f$ se trouve AU-DESSUS de sa tangente en 1 (dont l'équation est $y = x$). Et puisque la fonction est CONVEXE sur l'ensemble de $]0;+\infty[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ restera toujours au-dessus de cette droite soit $\boxed{f(x) \geq x}$ sur $]0;+\infty[$

4) a) Init : on a $U_0 \in]0;1[$ soit $0 < U_0 < 1 \rightarrow$ OK

Hérédité : on suppose $0 < U_n < 1$

soit $U_n \in]0;1[$

et, d'après la question 2) c), $f(U_n) \in]0;1]$

soit $0 < U_{n+1} < 1 \rightarrow$ OK

b) on a donc $U_n > 0$ pour tout n

et en appliquant la question 3) c), on aura :

$$f(U_n) \geq U_n$$

soit $U_{n+1} \geq U_n \rightarrow (U_n)$ croissante.

c) (U_n) est donc croissante et majorée (par 1)

$\rightarrow (U_n)$ est une suite $\boxed{\text{convergente.}}$

Exercice 3

1) on va, par exemple, montrer que $\vec{AB}$ ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ c'est à dire l'écriture $\vec{AB} = \alpha \vec{AC} + \beta \vec{AD}$ est impossible !!

on a : $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$ $\vec{AD}\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$

on remplace β par 0,5

on cherche α et β tels que :

$$\begin{cases} 3 = 3\alpha - 3\beta \\ 3 = 0 + 6\beta \\ 3 = -3\alpha - 3\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3\alpha = 3 + 3\times 0{,}5 = 4{,}5 \\ \beta = 3/6 = 0{,}5 \\ 3\alpha = -3 - 3\times 0{,}5 = -4{,}5 \end{cases}$$

on obtient une contradiction.

→ on ne peut pas écrire $\vec{AB} = \alpha\vec{AC} + \beta\vec{AD}$
Donc A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

2) a) on a déjà calculé $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$
et on voit que $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} \cdot \vec{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix} = 3\times 3 + 3\times 0 + 3\times(-3) = 0$

et donc $\vec{AB} \perp \vec{AC}$ → triangle rectangle en A.

b) on a $\vec{AD}\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix} \cdot \vec{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} = -3\times 3 + 6\times 3 + (-3)\times 3 = 0$

et $\vec{AD}\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix} \cdot \vec{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix} = -3\times 3 + 6\times 0 + (-3)\times(-3) = 0$

Donc $\vec{AD} \perp \vec{AB}$ et $\vec{AD} \perp \vec{AC}$ → $(AD) \perp (ABC)$.

c) on prend ABC comme base du tétraèdre et la hauteur associée sera [AD].

on a : $\text{Volume}_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \underbrace{\text{Aire}_{ABC}}_{\text{Base}} \times \underbrace{AD}_{\text{Hauteur}}$

on a : $\text{Aire}_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2}$ (c'est un triangle rectangle en A).

avec $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \dots} = \sqrt{3^2+3^2+3^2} = \sqrt{27}$

$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + \dots} = \sqrt{3^2+0^2+(-3)^2} = \sqrt{18}$

et $AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + \dots} = \sqrt{(-3)^2+6^2+(-3)^2} = \sqrt{54}$

On obtient : $\text{Volume}_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{27} \times \sqrt{18}}{2} \times \sqrt{54} = \boxed{27}$

---

3) a) c'est le même travail que la question 1 sauf que cette fois on va pouvoir trouver α et β.

On a $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-3\\-6\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\3\\-6\end{pmatrix}$

on cherche α et β tel que $\overrightarrow{BH} = \alpha\overrightarrow{BC} + \beta\overrightarrow{BD}$

soit $\begin{cases} -1 = 0 - 6\beta \longrightarrow \boxed{\beta = 1/6} \\ -1 = -3\alpha + 3\beta \longrightarrow 3\alpha = 1 + 3 \times 1/6 \\ -4 = -6\alpha - 6\beta \longrightarrow 6\alpha = 4 - 6 \times 1/6 \end{cases}$ on a remplacé β par $1/6$.

on obtient $3\alpha = 3/2$ soit $\alpha = 1/2$
et $6\alpha = 3$ soit $\alpha = 3/6 = 1/2$ → c'est bon !!

on obtient : $\boxed{\overrightarrow{BH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BD}}$

b) on va montrer $\overrightarrow{AH}$ est normal au plan (BCD)

→ on a $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-3\\-6\end{pmatrix} = 2\times0 + 2\times(-3) + (-1)\times(-6) = 0$

et $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\3\\-6\end{pmatrix} = 2\times(-6) + 2\times3 + (-1)\times(-6) = 0$

Donc $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BD} \rightarrow (AH) \perp (BCD)$

et d'après la question précédente, on sait que les points B, H, C et D sont coplanaires.

Donc $H \in (BCD)$

Donc H est le projeté orthogonal de A sur (BCD).

c) on calcule $AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + \dots\dots} = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \boxed{\sqrt{9}} = \boxed{3}$

d) on sait déjà que le volume du tétraèdre ABCD est égal à 27

et on va prendre le triangle BCD comme base et la hauteur associée sera alors AH !!

on a : $\text{Volume}_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{BCD} \times \underbrace{\text{Hauteur}}_{AH}$

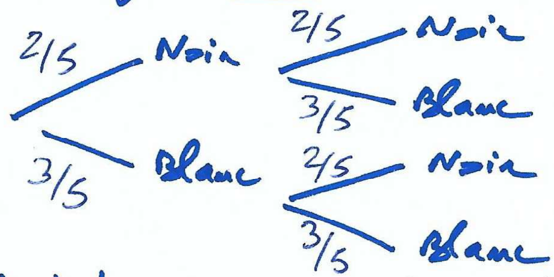
soit $27 = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{BCD} \times 3$

On en déduit : $\text{Aire}_{BCD} = \boxed{27}$

Exercice 4 → cet exercice reprend le travail de 1^{re} sur les lois de probabilités.

① ⓐ on a ici un tirage AVEC remises.

→ on obtient

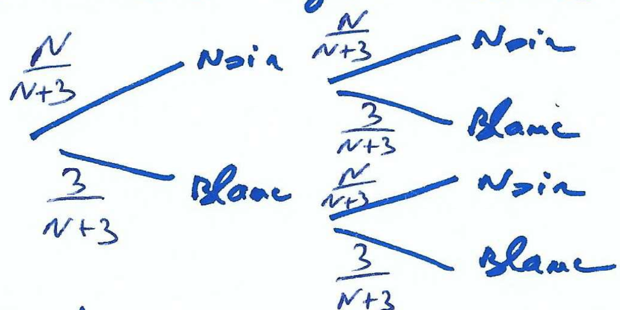


ⓑ Perdre 9 € revient à tirer deux jetons blancs.

soit $p(\text{Blanc} \cap \text{Blanc}) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \boxed{\frac{9}{25}}$

② avec N jetons noirs et 3 jetons blancs → total : $N+3$

→ on obtient



→ la variable aléatoire prend comme valeur -9 ; -1 ; $+5$

on a : $p(X=-9) = p(\text{Blanc} \cap \text{Blanc}) = \frac{3}{N+3} \times \frac{3}{N+3} = \boxed{\frac{9}{(N+3)^2}}$

$p(X=-1) = p(\text{Noir} \cap \text{Noir}) = \frac{N}{N+3} \times \frac{N}{N+3} = \boxed{\frac{N^2}{(N+3)^2}}$

$p(X=+5) = p(\text{couleurs différentes}) = \frac{N}{N+3} \times \frac{3}{N+3} + \frac{3}{N+3} \times \frac{N}{N+3}$

$= \boxed{\frac{6N}{(N+3)^2}}$

on obtient :

x_i	-9	-1	5
p_i	$\frac{9}{(N+3)^2}$	$\frac{N^2}{(N+3)^2}$	$\frac{6N}{(N+3)^2}$

b) on fait le tableau de signes de $-x^2+30x-81$

→ discriminant $\Delta = (30)^2 - 4\times(-1)\times(-81) = 576$

→ deux racines : $x_1 = 3$ et $x_2 = 27$

on obtient :

x	$-\infty$		3		27		$+\infty$
$-x^2+30x-81$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$a=-1$

↪ courbe du type ∩

↪ $\boxed{S =]3\,;27[}$

c) on cherche à résoudre $E(X) > 0$ espérance !!

avec $E(X) = p_1\times x_1 + p_2\times x_2 + p_3\times x_3 = \dfrac{-N^2+30N-81}{(N+3)^2}$

→ on résout : $\dfrac{-N^2+30N-81}{(N+3)^2} > 0$

soit $-N^2+30N-81 > 0$ ($(N+3)^2$ est positif !!)

soit $N \in]3\,;27[$ d'après le b)

donc il faudra $\boxed{\text{entre 4 et 26}}$ jetons noirs.

d) on a $E(X) = \dfrac{-N^2+30N-81}{(N+3)^2}$

⚠ Le maximum de $E(X)$ ne correspond pas au maximum du numérateur !! Mais on est libre ici d'utiliser un tableau de valeurs pour $E(X)$ avec des valeurs ENTIÈRES de N prises entre 4 et 26 !!

→ on obtient un gain moyen maximal égal à $\boxed{0{,}8\ €}$ pour $\boxed{N=7}$.

3) on peut utiliser ici une loi BINOMIALE avec les deux issues : succès = gagner 5 € et échec = ne pas gagner 5 €, et on a $n = 10$ et $p = p(5€) = \dfrac{6\times 7}{(7+3)^2} = 0{,}42$

→ on cherche alors $p(X\geq 1)$

soit $1 - p(X=0) \approx \boxed{0{,}996}$