Bac Spé Maths 2022
Voici la correction complète
de l'épreuve 2
Asie 2022

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

1) a) $\vec{AB}\begin{vmatrix} 2-(-3)=5 \\ 2-1=1 \\ 3-3=0 \end{vmatrix}$ et $\vec{DC}\begin{vmatrix} 1-(-4)=5 \\ 7-6=1 \\ -1-(-1)=0 \end{vmatrix}$ et $\vec{AD}\begin{vmatrix} -4-(-3)=-1 \\ 6-1=5 \\ -1-3=-4 \end{vmatrix}$

b) on a donc $\vec{AB}=\vec{DC}$ (les vecteurs ont les mêmes coordonnées)

Donc ABCD est un parallélogramme.

attention à l'ordre des lettres !

et on va montrer que $\vec{AD}\perp\vec{AD}$ pour avoir un rectangle.

On calcule $\vec{AB}\begin{vmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}\cdot\vec{AD}\begin{vmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{vmatrix} = 5\times(-1)+1\times5+0\times(-4)=0$

Donc on a bien $\vec{AD}\perp\vec{AB}$ → ABCD est un rectangle.

c) on calcule $AD=\sqrt{(x_D-x_A)^2+\dots} = \sqrt{(-1)^2+5^2+(-4)^2}=\sqrt{42}$

et $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+\dots} = \sqrt{5^2+1^2+0^2}=\sqrt{26}$

et $Aire_{ABCD} = AB\times AD = \sqrt{42}\times\sqrt{26} = \boxed{\sqrt{1092}} = \boxed{2\sqrt{273}} \approx \boxed{33}$

2) a) il faut montrer que A, B et D ne sont pas alignés.

et c'est forcément le cas puisque l'on a montré que ABCD était un rectangle !!

b) on calcule $\vec{n}\begin{vmatrix} -2 \\ 10 \\ 13 \end{vmatrix}\cdot\vec{AB}\begin{vmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = -2\times5+10\times1+13\times0=0$

et $\vec{n}\begin{vmatrix} -2 \\ 10 \\ 13 \end{vmatrix}\cdot\vec{AD}\begin{vmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{vmatrix} = -2\times(-1)+10\times5+13\times(-4)=0$

Donc on a $\vec{n}\perp\vec{AB}$ et $\vec{n}\perp\vec{AD}$ soit $\boxed{\vec{n}\perp(ABD)}$

c) on utilise le vecteur normal $\vec{n}\begin{vmatrix} -2 \\ 10 \\ 13 \end{vmatrix}$

→ on obtient pour (ABD) : $-2x+10y+13z+d=0$

or $A\in(ABD)$ donc $-2\times(-3)+10\times1+13\times3+d=0$

soit $55+d=0 \to d=-55$

On obtient pour le plan (ABD) : $\boxed{-2x+10y+13z-55=0}$

3) a) La droite Δ est donc dirigée par $\vec{n}$.

On a : $\Delta \begin{cases} x = \underbrace{\boxed{-3}}_{\text{point } K} + \underbrace{\boxed{(-2)}}_{\text{vecteur } \vec{n}}\, t \\ y = 14 + 10\, t \\ z = 14 + 13\, t \end{cases}$ soit $\Delta \begin{cases} x = -3-2t \\ y = 14+10t \\ z = 14+13t \end{cases}$

b) Le point I est en fait le point d'intersection de Δ et (ABD).
→ on "met" la droite Δ dans l'équation du plan.

On obtient : $-2(-3-2t)+10(14+10t)+13(14+13t)-55=0$

soit $273+273t=0 \rightarrow t=-1$

On obtient donc $I \begin{cases} x=-3-2\times(-1) \\ y=14+10\times(-1) \\ z=14+13\times(-1) \end{cases} \rightarrow I\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) La hauteur est la distance entre K et son projeté I

$\rightarrow KI = \sqrt{(x_I - x_K)^2 + \dots} = \sqrt{2^2+(-10)^2+(-13)^2} = \sqrt{273}$

4) Le sommet de la pyramide sera le point K
→ la base sera le rectangle ABCD
et la hauteur correspond à la distance KI.

On a : $\text{Volume}_{KABCD} = \frac{1}{3} \times \underbrace{2\sqrt{273}}_{\text{Aire de ABCD}} \times \underbrace{\sqrt{273}}_{KI} = \boxed{182}$

$\boxed{\text{Exercice 2}}$

Partie A : 1) La fonction liée à $\mathcal{C}_2$ est toujours positive et la fonction liée à $\mathcal{C}_1$ est croissante.

Donc $\mathcal{C}_2$ correspond à la dérivée f' et $\mathcal{C}_1$ correspond à la fonction f.

2) on se place sur l'ordonnée égale à 3 et, en traçant une droite horizontale, l'intersection avec $\mathcal{C}_1$ (et donc la fonction f) se trouve en $\boxed{5,5}$.

Donc, pour $f(x) = 3$, on obtient $\boxed{S = \{5,5\}}$

3) La fonction semble $\boxed{\text{CONCAVE}}$ sur $]3\,;+\infty[$

Partie B :

1) il faut vérifier que $x^2 - x - 6$ soit POSITIF !!

→ on calcule le discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$

→ il y a deux racines : $x_1 = 3$ et $x_2 = -2$

on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
signes de x^2-x-6		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc, pour $x \in]3\,;+\infty[$, on a bien $x^2 - x - 6 > 0$.

2) $\boxed{\text{en } 3^+}$, on a $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} (x^2 - x - 6) = 0$

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} \ln(x^2 - x - 6) = \boxed{-\infty}$

$\boxed{\text{en } +\infty}$, on a $x^2 - x - 6 = \underset{\searrow +\infty}{x^2}\underbrace{\left(1 - \underset{\searrow 0}{\frac{1}{x}} - \underset{\searrow 0}{\frac{6}{x^2}}\right)}_{\text{tend vers } 1}$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - x - 6 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2 - x - 6) = \boxed{+\infty}$

Bilan : on a $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} f(x) = -\infty \rightarrow$ $\boxed{\text{asymptote verticale d'équation } x = 3}$

3) a) on utilise $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u} \rightarrow \boxed{f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x-6}}$

b) on sait que $x^2 - x - 6 > 0$ sur $]3\,;+\infty[$

$\rightarrow$ le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $2x - 1$.

x	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

pour $x > 3$
on a $2x > 6$
et $2x - 1 > 5 > 0$
Donc POSITIF !!

4) a) L'utilisation du TVI nous permet d'affirmer l'unicité sur $]3\,;+\infty[$ pour l'équation $f(x) = 3$

or on a $f(5) \approx 2{,}6 < 3$
et $f(6) \approx 3{,}2 > 3$ $\rightarrow$ l'unique solution est bien sur $]5\,;6[$

b) Avec la calculatrice, on obtient : $\boxed{5{,}63 < \alpha < 5{,}64}$

5) a) on utilise $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ et on dérive f' !!

$$\rightarrow f''(x) = \frac{2(x^2-x-6) - (2x-1)(2x-1)}{(x^2-x-6)^2}$$

bien penser aux changements de signes !

$$\text{soit } f''(x) = \frac{2x^2 - 2x - 12 - 4x^2 + 2x + 2x - 1}{(x^2-x-6)^2} = \frac{-2x^2 + 2x - 13}{(x^2-x-6)^2}$$

b) Le discriminant de $-2x^2 + 2x - 13$ est $\Delta = -100 < 0$

$\rightarrow$ pas de racine $\rightarrow$ signe constant qui est NÉGATIF ici.

Le dénominateur est bien sûr toujours POSITIF

Donc on a $f''(x) < 0$ pour $x \in]3\,;+\infty[$

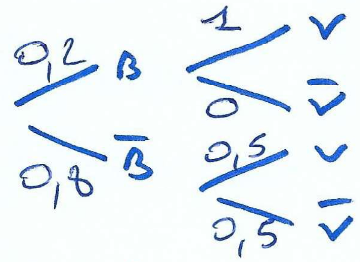
et donc f est CONCAVE sur $]3\,;+\infty[$.

Exercice 3

Partie 1 : 1) $P_B(V)$ correspond à la probabilité d'être à l'heure sachant qu'il a pris le bus

→ l'énoncé nous donne $\boxed{P_B(V) = 1}$

2) on obtient :



3) on utilise la formule des probabilités totales

→ $p(V) = p(B \cap V) + p(\overline{B} \cap V)$

$= 0,2 \times 1 + 0,8 \times 0,5 = \boxed{0,6}$

4) on cherche $p_V(B) = \dfrac{p(V \cap B)}{p(V)} = \dfrac{0,2 \times 1}{0,6} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$

Partie 2 :

1) on considère que l'on a des épreuves identiques et indépendantes avec 2 issues possibles

→ loi binomiale avec $\underbrace{n = 206}_{\text{billets vendus}}$ et $p = 1 - \underbrace{0,05}_{\text{ne se présente pas}} = \underbrace{0,95}_{\text{se présente}}$

2) moyenne $= E(X) = n \times p = 206 \times 0,95 \simeq \boxed{196 \text{ passagers}}$

Donc il y a en moyenne 196 passagers qui se présentent sur l'ensemble des 206 billets vendus.

3) on cherche $p(X = 201) \simeq \boxed{0,031}$ soit $\boxed{3,1\%}$

↳ binom Fdp

4) on cherche $p(X \leq 200) \simeq \boxed{0,948}$ soit $\boxed{94,8\%}$

↳ binom FRep

5) a) La somme de toutes les probabilités du tableau doit être égale à 1

→ on additionne les six écrites et on soustrait le résultat à 1 → $p(Y=6) = 1 - 0{,}99997 = \boxed{0{,}00003}$

b) Le chiffre d'affaires sera ici égal à la somme obtenue avec la vente de 206 billets ($\rightarrow 206 \times 250$ € $= 51\,500$ €) en enlevant le prix du billet 250 € et la pénalité 600 € (soit 850 €) pour chaque passager Y ne pouvant embarquer.

soit $\boxed{C = 51\,500 - 850\,Y}$

c) on obtient le tableau suivant :

$51\,500 - 850 \times 0$ $\qquad$ $51\,500 - 850 \times 1$ .... etc ...

$C\,i$	51500	50650	49800	48950	48100	47250	46400
$P(C=C\,i)$	0,94775	0,03063	0,01441	0,00539	0,00151	0,00028	0,00003

On calcule $E(C) = 51\,500 \times 0{,}94775 + \ldots + 46\,400 \times 0{,}00003$

$\rightarrow \boxed{E(C) \approx 51\,429 \text{ €}}$

d) Et, donc, en vendant exactement 200 billets, le chiffre d'affaires sera 200×250 € $= 50\,000$ €

MAIS elle peut espérer un chiffre d'affaires de 51 429 € avec le surbooking proposé ici.

$\boxed{\text{Exercice 4}}$

1) a) on a $p_1 = 0,3 + 0,7 \times p_0^2 = 0,3 + 0,7 \times 0,3^2$

$\longrightarrow \boxed{p_1 = 0,363}$

et $p_2 = 0,3 + 0,7 \times p_1^2 = 0,3 + 0,7 \times 0,363^2$

$\longrightarrow \boxed{p_2 = 0,3922383}$

__Bilan__ : il y a 36,3% de chances d'avoir au plus 1 descendance et environ 39,2% d'avoir au plus 2 descendances.

b) on va utiliser l'évènement CONTRAIRE de "au moins 11" qui est "au plus 10".

$\longrightarrow$ la probabilité cherchée est donc $1 - p_{10}$ 0,42802018 ⚠⚠

$\approx \boxed{0,572}$

c) La suite semble être CROISSANTE et tendre vers une LIMITE (donc CONVERGENTE), limite qu'il paraît compliqué de conjecturer !!

2) a) __Init__ on a $p_0 = 0,3$ et $p_1 = 0,363$

Donc on a bien $0 \leq p_0 \leq p_1 \leq 0,5$

__Hérédité__ on suppose $0 \leq p_n \leq p_{n+1} \leq 0,5$

on obtient $0^2 \leq p_n^2 \leq p_{n+1}^2 \leq 0,5^2$

et, en multipliant par 0,7 et en ajoutant 0,3, on a :

$$\underbrace{0,3+0,7\times 0^2}_{0,3} \leq \underbrace{0,3+0,7\times p_n^2}_{p_{n+1}} \leq \underbrace{0,3+0,7\times p_{n+1}^2}_{p_{n+2}} \leq \underbrace{0,3+0,7\times 0,5^2}_{0,475}$$

On a bien : $0,3 \leq p_{n+1} \leq p_{n+2} \leq 0,475 \; (<0,5)$

OK

b) on a $p_n \leq p_{n+1}$ → (p_n) est croissante

et $p_n \leq 0,5$ → (p_n) est majorée par 0,5

Donc (p_n) est croissante ET majorée → elle CONVERGE.

3) a) on a $p_{n+1} = 0,3 + 0,7 p_n^2$

Donc, par passage à la limite L, on obtient :

$$L = 0,3 + 0,7 \times L^2$$

soit $0 = 0,7L^2 - L + 0,3$

Donc L est bien solution de $0,7x^2 - x + 0,3 = 0$

b) on résout cette équation !!

→ son discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 0,7 \times 0,3 = 0,16$

→ 2 solutions : $x_1 = \frac{3}{7}$ et $x_2 = 1$

or 1 ne peut pas être la limite de cette suite (p_n)

Donc on aura $\boxed{L = \lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \frac{3}{7}}$

suite majorée par 0,5 !!

4) on aura :

Ligne 2 p = $\boxed{0,3}$

Ligne 4 for i in range $\boxed{(\ n\ \ )}$

Ligne 5 p = $\boxed{0,3 + 0,7 * p * p}$

attention, on veut les n premiers termes sachant que la valeur 0,3 correspond à p_0.

Donc il faut "aller" jusqu'à p_{n-1} et l'instruction for i in range (...) s'arrête à l'entier qui précède celui mis dans les parenthèses !