# Bac Spé Maths 2022
# Voici la correction complète
# de l'épreuve 1
# Polynésie 2022

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

**Exercice 1** → c'est le QCM.

Les bonnes réponses sont :
1 → d
2 → c
3 → a
4 → d
5 → c
6 → a

Voici quelques explications (même si ce n'est pas demandé ici).

**Question 1** : on applique $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

avec $u(x) = x^2 + x + 1 \to u'(x) = 2x + 1$

**Question 2** : on dérive chaque proposition et on regarde laquelle nous donne $\ln x$ !

→ on a $(x \ln x - x)'$

$$= \underbrace{1}_{u'} \times \underbrace{\ln x}_{v} + \underbrace{x}_{u} \times \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

**Question 3** : on a une forme indéterminée type $\frac{\infty}{\infty}$

Donc on factorise par $-3^n$ et par $2^n$.

On a $\dfrac{1-3^n}{1+2^n} = \dfrac{-3^n\left(\frac{1}{-3^n} + 1\right)}{2^n\left(\frac{1}{2^n} + 1\right)}$

tend vers 0

tend vers 0

Donc chaque parenthèse tend vers 1

On a $\dfrac{-3^n}{2^n} = -\dfrac{3^n}{2^n} = -\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^n = +\infty$ car $\dfrac{3}{2} > 1$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -\left(\dfrac{3}{2}\right)^n = -\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = -\infty$

**Question 4** : L'énoncé nous donne des infos sur $f'$ et la question porte sur la concavité de $f$.

→ on s'intéresse aux variations de $f'$.

et $f'$ est décroissante sur $[-2 ; 0]$

Donc $f$ est CONCAVE sur $[-2 ; 0]$.

**Question 5** : L'énoncé nous donne la courbe de $f'$ et la question porte sur les variations de $f$.

→ on s'intéresse aux signes de $f'$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | | $+$ | | $0$ | | $-$ | | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | | ↗ | $f(0)$ | ↗ | Maximum | ↘ | $f(2)$ | ↘ | | ↗ | |

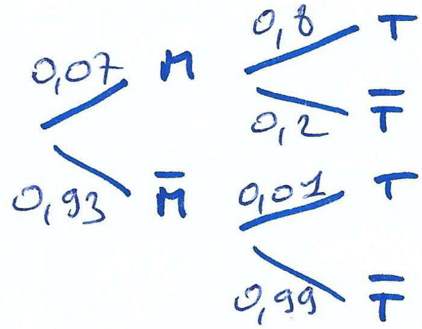
→ la seule réponse correcte correspond donc au fait d'avoir un maximum en 1 sur $[0 ; 2]$

**Question 6** : il faut que l'algorithme "tourne" tant que la valeur ne dépasse pas 200.

→ seul l'algorithme a) donne cette condition.

Exercice 2

1) on a l'arbre suivant




et $p(M \cap T) = 0{,}07 \times 0{,}8$
$= \boxed{0{,}056}$

2) on applique la formule des probabilités totales

$\to p(T) = p(M \cap T) + p(\overline{M} \cap T)$
$= 0{,}056 + 0{,}93 \times 0{,}01 = \boxed{0{,}0653}$

3) Le but est de dépister une maladie
Donc il est plus pertinent de connaître $P_T(M)$,
c'est à dire la probabilité d'être malade sachant que le test est positif.

4) on cherche $p_T(M) = \dfrac{p(T \cap M)}{p(T)} = \dfrac{0{,}056}{0{,}0653} \approx \boxed{0{,}86}$

5) a) on a une loi binomiale de paramètres
$\boxed{p = p(T) = 0{,}0653}$ et $\boxed{n = 10}$

b) on cherche $p(X=2) \approx \boxed{0{,}11}$ $\to$ binomFdp

6) c'est une question très classique !!
$\to$ on cherche $p(X \geq 1) > 0{,}99$
or $p(X \geq 1) = 1 - p(X=0) = 1 - \underbrace{\binom{n}{0}}_{1}\underbrace{p^0}_{1}\underbrace{(1-p)^{n-0}}_{0{,}9347^n}$

on résout donc : $1 - 0{,}9347^n > 0{,}99$

soit $0{,}9347^n < 0{,}01$
soit $\ln(0{,}9347^n) < \ln 0{,}01$
soit $n \times \ln(0{,}9347) < \ln 0{,}01$
soit $n \boxed{>} \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}9347} \approx 68{,}2$ $\to$ à partir de 69 personnes

on a divisé par $\ln 0{,}9347$ qui est négatif !!

$\boxed{\text{Exercice 3}}$

1) a) On a $U_1 = \frac{U_0}{1+U_0} = \frac{1}{1+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$

et $U_2 = \frac{U_1}{1+U_1} = \frac{1/2}{1+1/2} = \boxed{\frac{1}{3}}$ et $U_3 = \frac{U_2}{1+U_2} = \frac{1/3}{1+1/3} = \boxed{\frac{1}{4}}$

b) Ligne 3 $u = \boxed{1}$
Ligne 6 $u = \boxed{u\ /\ (1+u)}$ — à ne pas oublier !!

2) On calcule $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n}{1+U_n} - U_n = \frac{U_n - U_n(1+U_n)}{1+U_n}$

soit $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n - U_n - U_n^2}{1+U_n} = \frac{-U_n^2}{1+U_n}$

or $(U_n)$ est une suite à termes positifs $\rightarrow 1+U_n > 0$
et $U_n^2$ est forcément positif donc $-U_n^2$ est négatif.
On obtient : $U_{n+1} - U_n < 0 \rightarrow \boxed{(U_n) \text{ est décroissante.}}$

3) $(U_n)$ est convergente car on vient de montrer qu'elle est décroissante et la suite est minorée par 0 (car elle est à termes positifs).

4) On a $U_{n+1} = \frac{U_n}{1+U_n}$

Donc, par passage à la limite, en notant $\ell$ la limite de cette suite $(U_n)$, on obtient :

$$\ell = \frac{\ell}{1+\ell} \quad \text{soit } \ell(1+\ell) = \ell$$
$$\rightarrow \ell + \ell^2 = \ell$$
$$\rightarrow \ell^2 = 0 \quad \text{soit } \boxed{\ell = 0}$$

5) a) On a $U_0 = 1$ ; $U_1 = \frac{1}{2}$ ; $U_2 = \frac{1}{3}$

$\rightarrow$ il semblerait que $U_n = \frac{1}{n+1}$

b) Montrons effectivement que, pour tout entier $n$,

on a bien $U_n = \dfrac{1}{n+1}$

<u>Init</u> : on a $U_0 = 1$ et on a bien $U_0 = \dfrac{1}{0+1} = \dfrac{1}{1} = 1$.

<u>Hérédité</u> : on suppose que l'on a $U_n = \dfrac{1}{n+1}$

et on <u>part de</u> $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1+U_n}$

On obtient :

$$U_{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+1}{n+1}+\frac{1}{n+1}}$$

$$\text{soit } U_{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+2}{n+1}} = \frac{1}{\cancel{n+1}} \times \frac{\cancel{n+1}}{n+2} = \frac{1}{n+2}$$

simplification

On a bien $U_{n+1} = \dfrac{1}{n+1+1} = \dfrac{1}{n+2}$.

## Exercice 4

1) a) Plutôt qu'une réciproque de la propriété de Pythagore, on va montrer $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ avec un produit scalaire.

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\7\\1\end{pmatrix} = -1\times4 + 1\times7 + (-3)\times1 = 0$

Donc on a bien $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ $\rightarrow$ triangle rectangle en A.

b) on calcule $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5\\6\\4\end{pmatrix} = 1\times5+(-1)\times6+3\times4 = \boxed{11}$

et on a $BA = \sqrt{(x_A-x_B)^2+\dots\dots} = \sqrt{1^2+(-1)^2+3^2} = \boxed{\sqrt{11}}$

$BC = \sqrt{(x_C-x_B)^2+\dots} = \sqrt{5^2+6^2+4^2} = \boxed{\sqrt{77}}$

c) on écrit : $\underbrace{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}_{11} = \underbrace{BA}_{\sqrt{11}} \times \underbrace{BC}_{\sqrt{77}} \times \cos(\widehat{ABC})$

soit $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{11}{\sqrt{11}\times\sqrt{77}} \rightarrow \widehat{ABC} = \cos^{-1}\left(\dfrac{11}{\sqrt{11}\times\sqrt{77}}\right) \approx \boxed{68^\circ}$

2) a) Deux plans sont parallèles si leurs vecteurs normaux sont colinéaires ou égaux.

Or on connaît $P : 2x - y - z + 4 = 0$ et donc on connaît un vecteur normal $\vec{n}_P\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ à ce plan.

Donc les deux plans sont parallèles si $\vec{n}_P$ est aussi un vecteur normal au plan (ABC)

$\rightarrow$ on calcule $\vec{n}_P\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix} = 2\times(-1)+(-1)\times1+(-1)\times(-3) = \boxed{0}$

et $\vec{n}_P\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\7\\1\end{pmatrix} = 2\times4+(-1)\times7+(-1)\times1 = \boxed{0}$

OK

b) Avec ce vecteur normal $\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$, on obtient une équation de (ABC) : $2x - 1y - 1z + d = 0$

or $A \in (ABC) \rightarrow 2\times2 - 1\times(-1) - 1\times0 + d = 0$

$\rightarrow 5 + d = 0 \rightarrow d = -5$

On obtient pour (ABC) : $\boxed{2x - y - z - 5 = 0}$

c) $\mathcal{D}$ est donc dirigé par le vecteur normal $\vec{n_P}$

On obtient : $\mathcal{D}\begin{cases} x = \boxed{1} + \boxed{2} \times t \\ y = 2 + (-1) \times t \\ z = 4 + (-1) \times t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 4-t \end{cases}$

point E vecteur directeur

d) ce projeté correspond au point d'intersection entre la droite $\mathcal{D}$ et le plan (ABC).

→ on "met" la droite $\mathcal{D}$ dans l'équation du plan.

On obtient : $2(1+2t) - (2-t) - (4-t) - 5 = 0$

soit $6t - 9 = 0 \rightarrow t = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

on obtient alors le point H $\begin{cases} x = 1 + 2 \times \frac{3}{2} = \boxed{4} \\ y = 2 - \frac{3}{2} = \boxed{\frac{1}{2}} \\ z = 4 - \frac{3}{2} = \boxed{\frac{5}{2}} \end{cases}$

3) ABC est rectangle en A → $\text{Aire}_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2}$

avec $AB = \sqrt{11}$ et $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + \dots} = \sqrt{66}$

La hauteur correspondante sera ici EH,

et on calcule $EH = \sqrt{(x_H - x_E)^2 + \dots\dots}$

soit $EH = \sqrt{(4-1)^2 + \left(\frac{1}{2}-2\right)^2 + \left(\frac{5}{2}-4\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{2}}$

On a alors :

$$\text{Volume}_{ABCE} = \frac{1}{3} \times \underbrace{\frac{\sqrt{11} \times \sqrt{66}}{2}}_{\text{Aire Base}} \times \underbrace{\sqrt{\frac{27}{2}}}_{\text{Hauteur}} = \boxed{16{,}5}$$