Bac Spé Maths 2022
Voici la correction complète
de l'épreuve 1
Centres Etrangers Afrique 2022

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1 → c'est le QCM.

Les bonnes réponses sont : 1 → c

2 → c

3 → a

4 → a

5 → a

6 → b

Voici quelques éléments de réponses (même si ce n'est pas demandé le jour du BAC).

Question 1 : on peut s'aider des variations de f

→ $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ du signe de $2x$!!

soit

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

$f(0) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$

→ on constate que la fonction f "passe" deux fois par la valeur 2022 (entre 0 et $+\infty$).

Question 2 : on cherche le signe de $g''(x)$.

On a $g'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 2x = \ln x + 1 - 2x$

et $g''(x) = \frac{1}{x} - 2 = \frac{1-2x}{x}$ du signe de $1-2x$ sur $]0;+\infty[$

on obtient

x	0		$1/2$		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		convexe		concave	

exactement un point d'inflexion

Question 3 : on a $\left(\ln(1-x^2)\right)' = \dfrac{-2x}{1-x^2}$

Donc on a bien $g'(x) = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{-2x}{1-x^2} = \dfrac{x}{1-x^2} = f(x)$.

Question 4 : il faut que $-x^2 - x + 6 > 0$

→ étude du signe d'un trinôme !!

→ $\Delta = 25$ → 2 racines : $x_1 = -3$ et $x_2 = 2$

D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$-x^2-x+6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

avec $a = -1$, on a une courbe du type 

↳ sur $]-3;2[$!!

Question 5 : on calcule $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

avec $f(1) = -3$ et $f'(x) = 2x - 4 + 3 \times \dfrac{2}{2x-1}$

soit $f'(1) = 4$

→ $y = 4(x-1) + (-3) = 4x - 7$ → réponse a

Question 6 : il faut $x + 3 > 0$ → $x > -3$

$x + 1 > 0$ → $x > -1$

et on résout $\ln(x+3) < 2\ln(x+1)$

soit $\ln(x+3) < \ln(x+1)^2$

soit $(x+3) < x^2 + 2x + 1$) en développant $(x+1)^2$.

soit $-x^2 - x + 2 < 0$

→ à nouveau, étude du signe d'un trinôme

on obtient :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$-x^2-x+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

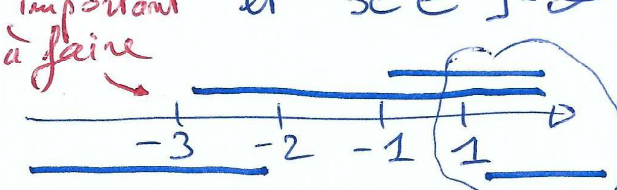
Bilan : on veut $x > -3$

$x > -1$

et $x \in]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$

un schéma important à faire

soit



Les 3 conditions sont réunies sur $]1;+\infty[$

$\boxed{\text{Exercice 2}}$

1) a) on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-2=-2\\2-0=2\\1-3=-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1-2=-3\\-1-0=-1\\2-3=-1\end{pmatrix}$

→ les coordonnées ne sont pas proportionnelles
→ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires
→ A, B et C ne sont pas alignés.

b) on a $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+\ \dots}=\boxed{\sqrt{12}}=\boxed{2\sqrt{3}}$

et $AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+\ \dots}=\boxed{\sqrt{11}}$

c) on calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\end{pmatrix}=-2\times(-3)+2\times(-1)+(-2)\times(-1)$

→ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\boxed{6}$

→ on en déduit : $\underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}_{6}=\underbrace{AB}_{2\sqrt{3}}\times\underbrace{AC}_{\sqrt{11}}\times\cos(\widehat{BAC})$

soit $\cos(\widehat{BAC})=\dfrac{6}{2\sqrt{3}\times\sqrt{11}}$ → $\widehat{BAC}=\cos^{-1}\left(\dfrac{6}{2\sqrt{3}\times\sqrt{11}}\right)\approx\boxed{58,5°}$

2) a) $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal au plan P, avec $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$

Donc on aura pour le plan P une équation :

$$-2x+2y-2z+d=0$$

or $C\in P$ donc $-2\times(-1)+2\times(-1)-2\times2+d=0$

→ $-4+d=0$ → $d=4$

on obtient pour le plan P : $\boxed{-2x+2y-2z+4=0}$

b) on aura (AB) $\begin{cases}x=2+(-2)\times t\\y=0+2\times t\\z=3+(-2)\times t\end{cases}$ → $\begin{cases}x=2-2t\\y=2t\\z=3-2t\end{cases}$

point A $\qquad \overrightarrow{AB}$

c) on "met" l'équation de (AB) dans le plan P :

on obtient : $-2(2-2t)+2(2t)-2(3-2t)+4=0$

soit $-6+12t=0 \rightarrow t=\dfrac{6}{12}=0{,}5$

on obtient le point E $\begin{cases} x=2-2\times 0{,}5 = \boxed{1} \\ y=2\times 0{,}5 = \boxed{1} \\ z=3-2\times 0{,}5 = \boxed{2} \end{cases}$

d) [CE] représente la hauteur issue du point C par rapport à la base [AB] du triangle ABC.

$\rightarrow$ Aire $ABC = \dfrac{AB\times CE}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}\times\sqrt{8}}{2} = \boxed{\sqrt{24}} = \boxed{2\sqrt{6}}$

on calcule $CE=\sqrt{(x_E-x_C)^2+\dots}$

3) a) il faut un peu d'intuition ici !!

$\rightarrow$ on a $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}1-2=-1\\-1-0=-1\\3-3=0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}-2\times\begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix}$

$\rightarrow$ on a donc $\boxed{\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AF}}$

et les points A, B, C et F sont $\boxed{\text{coplanaires}}$.

b) on calcule $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}=2\times(-2)+(-2)\times 2+(-4)\times(-2)=\boxed{0}$

et $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\end{pmatrix}=2\times(-3)+(-2)\times(-1)+(-4)\times(-1)=\boxed{0}$

Donc on a $\overrightarrow{FD}\perp\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FD}\perp\overrightarrow{AC} \rightarrow (FD)\perp(ABC)$.

c) avec ABC comme base du tétraèdre, [FD] représente ici la hauteur.

$\rightarrow$ $\text{Volume}_{ABCD}=\dfrac{1}{3}\times \text{Aire}_{ABC}\times \underbrace{FD}_{\text{Hauteur}}$

$=\dfrac{1}{3}\times 2\sqrt{6}\times\sqrt{24}=\boxed{8}$

Exercice 3

Partie A 1) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x - x = +\infty$ (du type $0-(-\infty)$)

et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - x = +\infty$ (car $e^x - x = e^x\left(1 - \dfrac{x}{e^x}\right)$
et avec les croissances comparées $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$)

2) on a $h'(x) = e^x - 1$

on résout $h'(x)=0$
soit $e^x = 1$
soit $x = 0$

soit

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

1 car $h(0) = e^0 - 0 = 1$

3) pour des nombres <u>positifs</u>, on se trouve sur la partie CROISSANTE de la fonction.
Donc il y aura CONSERVATION de l'ordre.
et donc avec $0 \leq a \leq b$
on obtient $h(0) \leq h(a) \leq h(b)$
soit $(0<)\, 1 \leq h(a) \leq h(b)$
soit $\boxed{h(a) - h(b) \leq 0}$.

Partie B 1) on a $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

avec $f(0) = e^0 = 1$
et $f'(x) = e^x \rightarrow f'(0) = e^0 = 1$
on obtient : $y = 1 \times (x-0) + 1 \rightarrow \boxed{y = x + 1}$

2) on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ soit $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{1/n} = e^0 = 1$

et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{1/n} - \dfrac{1}{n} - 1 = 0$ (du type $1-0-1$)

3) a) on a $U_{n+1} - U_n$

$$= e^{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+1} - 1 - \left(e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} - 1\right)$$

cela donnerait $+1$ qui s'annule avec -1

$$= e^{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+1} - \left(e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= h\left(\frac{1}{n+1}\right) - h\left(\frac{1}{n}\right)$$

b) on a, pour tout n, $0 \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$

et, en utilisant la partie A, on en déduit :

$$h\Big(\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\text{joue le rôle de } a}\Big) - h\Big(\underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{joue le rôle de } b}\Big) \leq 0$$

soit $U_{n+1} - U_n \leq 0 \rightarrow \boxed{(U_n) \text{ est décroissante.}}$

4) on cherche l'écart entre T et $\mathcal{C}_f$

→ on peut noter Δ cet écart et on a :

$$\Delta = y - f(x) = x + 1 - e^x$$

Donc la suite (U_n) représente la valeur absolue de cet écart.

On a $U_7 = 0{,}01070852 > 0{,}01$

$U_8 = 0{,}00814453 < 0{,}01$

Donc, à partir du $\boxed{\text{rang } 8}$, cet écart est bien inférieur à $0{,}01$ (ou 10^{-2}).

Exercice 4

Partie A : 1) on a

	A	$\overline{A}$	Total
B	0,05	0,15	0,2
$\overline{B}$	0,05	0,75	0,8
Total	0,1	0,9	1

(en bleu, les valeurs données par la consigne)

(en rouge, les valeurs qui se calculent dans le tableau)

2) a) l'événement cherché est le contraire de l'événement "aucun défaut" $\longrightarrow \overline{A} \cap \overline{B}$

La probabilité cherchée est donc :

$$\underbrace{1 - p(\overline{A} \cap \overline{B})}_{\text{aucun défaut}} = 1 - 0,75 = \underbrace{\boxed{0,25}}_{\text{au moins un défaut.}}$$

b) on cherche $p(A \cap B) = \boxed{0,05}$

c) on calcule $p(A) \times p(B) = 0,1 \times 0,2 = 0,02$

et on a $p(A \cap B) = 0,05$

Donc $p(A) \times p(B) \neq p(A \cap B)$

Donc A et B ne sont pas indépendants.

Partie B : 1) ce sont les phrases habituelles

$\rightarrow$ événements indépendants, identiques avec 2 issues....

$\rightarrow$ On a une loi binomiale avec $\boxed{n = 50}$ et $\boxed{p = p(A) = 0,1}$

2) on a $p(X = 10) = \binom{50}{10} \times p^{10} \times (1-p)^{40}$ $\leftarrow 50 - 10$

$\rightarrow p(X = 10) = \binom{50}{10} \times 0,1^{10} \times 0,9^{40} \approx \boxed{0,015.}$

3) on cherche $E(X) = n \times p$ (pour une loi binomiale)

$\rightarrow E(X) = 50 \times 0,1 = \boxed{5}$ paires de verres