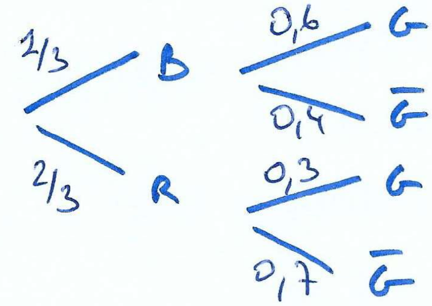
Bac Spé Maths 2022
Voici la correction complète
de l'épreuve 1
pour Asie 2022

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

## Exercice 1

1) a) on cherche $p_B(G)$ soit la probabilité de gagner sachant que le joueur a obtenu une case blanche
$\to$ il tire donc un seul jeton et il y a 3 impairs sur le total de 5 jetons $\to p_B(G) = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

b) on obtient l'arbre suivant




On a $p(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$
et $p(R) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
L'énoncé nous donne
$p_R(G) = 0{,}3$.

2) a) on utilise les probabilités totales

$\to p(G) = p(B \cap G) + p(R \cap G)$
$= \frac{1}{3} \times 0{,}6 + \frac{2}{3} \times 0{,}3 = \boxed{0{,}4}$

b) on cherche $p_G(B) = \frac{p(B \cap G)}{p(G)} = \frac{1/3 \times 0{,}6}{0{,}4} = \boxed{\frac{1}{2}} = \boxed{0{,}5}$

3) on a $p(B) \times p(G) = \frac{1}{3} \times 0{,}4 = \frac{2}{15}$
et $p(B \cap G) = \frac{1}{3} \times 0{,}6 = 0{,}2 = \frac{2}{10}$
$\to$ on a $p(B) \times p(G) \neq p(B \cap G)$
Donc B et G ne sont pas indépendants

4) a) on a des épreuves identiques, indépendantes, avec 2 issues possibles.
$\to$ c'est une loi binomiale de paramètres $n = 10$
et $p = p(G) = 0{,}4$

b) on cherche $p(X = 3) \approx 0{,}215$

$\hookrightarrow$ binom Fdp

c) on a $p(X \geq 4) = 1 - p(X \leq 3)$

$\approx 0,618$ ↳ binomFRep

→ il y a environ 61,8% que, sur les dix parties, le joueur en gagne au moins quatre.

5) a) on cherche $p_n = p(X \geq 1)$

$= 1 - p(X = 0)$

$= 1 - \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} \times \underbrace{p^0}_{=1} \times (1-p)^{n-0}$

→ $p_n = 1 - (1 - 0,4)^n = \boxed{1 - 0,6^n}$

b) on veut $p_n \geq 0,99$

soit $1 - 0,6^n \geq 0,99$

soit $0,6^n \leq 0,01$

soit $\ln 0,6^n \leq \ln 0,01$

soit $n \times \ln 0,6 \leq \ln 0,01$

soit $n \geq \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,6} \approx 9,02$

⚠ ln 0,6 est négatif → inversion du symbole

soit $\boxed{\text{à partir de } 10.}$

→ il faut jouer au moins 10 parties !!.

Exercice 2

Partie A : 1) on part de 1mg et, après une demi-heure, on obtient : $1mg - 10\% \times 1mg + 0{,}25mg$
$= \boxed{1{,}15mg}$

2) on a $U_{n+1} = U_n - \underbrace{10\% \times U_n}_{\text{élimination de } 10\%} + \underbrace{0{,}25}_{\text{ajout de } 0{,}25mg}$

$\rightarrow U_{n+1} = U_n - 0{,}1U_n + 0{,}25 = \boxed{0{,}9U_n + 0{,}25}$

3) a) Init
on a $U_0 = 1$ et $U_1 = 1{,}15$
Donc on a bien $U_0 \leq U_1 \leq 5$ OK

Hérédité
On suppose $U_n \leq U_{n+1} < 5$
on obtient $0{,}9U_n \leq 0{,}9U_{n+1} < 4{,}5$ 0,9×5
et $0{,}9U_n + 0{,}25 \leq 0{,}9U_{n+1} + 0{,}25 < 4{,}75$
soit $U_{n+1} \leq U_{n+2} < 4{,}75 < 5$ OK

b) on a $U_n \leq U_{n+1} \rightarrow (U_n)$ est croissante
on a $U_n < 5 \rightarrow (U_n)$ est majorée
$\rightarrow (U_n)$ est croissante et majorée $\rightarrow$ elle converge.

4) a) while ... $\boxed{u < 1{,}8}$
u = ... $\boxed{0{,}9u + 0{,}25}$

b) on peut tout à fait utiliser un tableau de valeurs sur la calculatrice $\rightarrow$ on a $U_7 \approx 1{,}78$
$U_8 \approx 1{,}85$

$\rightarrow$ on obtient $\boxed{n = 8}$

$\rightarrow$ le médicament commence à être réellement efficace à partir de 8 périodes de 30 minutes soit 4 heures.

5) a) c'est une question tellement classique !!

On a : $V_{n+1} = 2,5 - U_{n+1}$

$= 2,5 - (0,9U_n + 0,25)$

$= 2,5 - 0,9(2,5 - V_n) - 0,25$

$= 2,5 - 0,9 \times 2,5 + 0,9V_n - 0,25$

→ on obtient $\boxed{V_{n+1} = 0,9V_n}$

→ $(V_n)$ est une suite géo. de $\boxed{\text{raison } 0,9}$ et $\boxed{V_0 = 2,5 - U_0 = 1,5}$

b) on a donc : $V_n = V_0 \times q^{n-0} = 1,5 \times 0,9^n$

et $U_n = 2,5 - V_n = \boxed{2,5 - 1,5 \times 0,9^n}$

c) Inutile de calculer une limite (on aurait $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 2,5$)

car on a forcément $U_n < 2,5$ → aucun risque !!

on soustrait $1,5 \times 0,9^n$ à 2,5 pour obtenir $U_n$.

Partie B : 1) attention, on a 3h45min = 3,75 min

→ on calcule $f(3,75) \approx \boxed{1,79} < 1,8$ → $\boxed{\text{pas efficace}}$

2) on résout $2,5 - 1,5e^{-0,2t} \geq 1,8$

soit $1,5e^{-0,2t} \leq 0,7$

soit $e^{-0,2t} \leq \frac{0,7}{1,5}$ → $\ln e^{-0,2t} \leq \ln\left(\frac{0,7}{1,5}\right)$

→ $-0,2t \leq \ln\left(\frac{0,7}{1,5}\right)$

soit $t \geq \dfrac{\ln\left(\frac{0,7}{1,5}\right)}{-0,2} \approx 3,81$

→ médicament efficace à partir de 3,81h

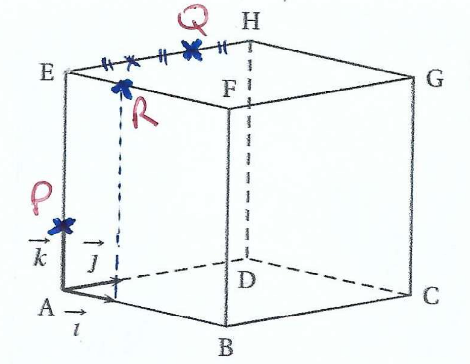
soit environ 3h49min

0,81×60min

3) le modèle est plus efficace

car on a $\underbrace{3^h49\text{ min}}_{\text{partie B}} < \underbrace{4h}_{\text{partie A}}$

Exercice 3 1)




2) on calcule $PR = \sqrt{(x_R - x_P)^2 + \ldots} = \sqrt{1^2+0^2+2^2} = \boxed{\sqrt{5}}$

et $QR = \sqrt{(x_R - x_Q)^2 + \ldots} = \sqrt{1^2+(-2)^2+0^2} = \boxed{\sqrt{5}}$

→ on a $PR = QR$ → triangle isocèle en R.

3) il faut montrer que P, Q, R ne sont pas alignés
or les points P et R sont sur le plan (ABE)
et Q n'appartient pas à ce plan.
Donc P, Q et R ne sont pas alignés → ils forment un plan.
( on aurait pu montrer que $\vec{PR}$ et $\vec{QR}$ n'étaient pas colinéaires → c'est une solution plus calculatoire ).

4) a)
on calcule $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \cdot \vec{PQ}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} = 2\times 0 + 1\times 2 + (-1)\times 2 = \boxed{0}$

et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \cdot \vec{PR}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = 2\times 1 + 1\times 0 + (-1)\times 2 = \boxed{0}$

Donc on a $\vec{u} \perp \vec{PQ}$ et $\vec{u} \perp \vec{PR}$ <u>soit</u> $\boxed{\vec{u} \perp (PQR)}$

b) (PQR) s'écrira donc :

$$2x + 1y + (-1)z + d = 0$$

or $P \in (PQR)$ → $2\times 0 + 1\times 0 + (-1)\times 1 + d = 0$

soit $-1 + d = 0$ → $d = 1$

on obtient pour (PQR) : $\boxed{2x + y - z + 1 = 0}$

c) (d) est donc dirigée par le vecteur $\vec{u}$

→ on obtient (d) $\begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = 0 + 1t \\ z = 3 + (-1)t \end{cases}$ → $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}$

point E vecteur $\vec{u}$

d) Le point L correspond au point d'intersection du plan (PQR) et de la droite (d).

→ on "met" la droite (d) dans le plan P.

on obtient : $2\times 2t + t - (3-t) + 1 = 0$

soit $6t - 2 = 0 \rightarrow t = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

soit pour le point L $\begin{cases} x = 2\times\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \end{cases}$

e) cette distance correspond à EL

→ on a $EL = \sqrt{\left(\frac{2}{3}-0\right)^2+\left(\frac{1}{3}-0\right)^2+\left(\frac{7}{3}-3\right)^2} = \boxed{\sqrt{\frac{2}{3}}}$

5) EQR est un triangle rectangle en E

→ $\text{Aire}_{EQR} = \frac{ER\times EQ}{2} = \frac{1\times 2}{2} = 1$

La hauteur associée est alors $EP = 2$

On a alors : $\text{Volume}_{EPQR} = \frac{1}{3}\times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Aire} \\ \text{de la base}}}{1} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hauteur} \\ \text{associée}}}{2} = \boxed{\frac{2}{3}}$

6) Prenons maintenant le triangle PQR comme base

→ la hauteur associée est alors EL.

et on a : $\text{Volume}_{EPQR} = \frac{1}{3}\times \text{Aire}_{PQR}\times EL$

soit $\frac{2}{3} = \frac{1}{3}\times \text{Aire}_{PQR}\times\sqrt{\frac{2}{3}}$

On obtient : $\text{Aire}_{PQR} = \frac{2/3}{1/3\times\sqrt{2/3}} = \boxed{\sqrt{6}}$.

**Exercice 4** Partie A

1) on a $\boxed{f(1) = 3}$
et $\boxed{f'(1) = 1}$ c'est le coefficient directeur de la tangente en A.

2) a) on applique $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ → $\boxed{f'(x) = \dfrac{2ax}{ax^2+1}}$

b) on résout le système $\begin{cases} f(1) = 3 \rightarrow \ln(a\times 1^2+1)+b = 3 \\ f'(1) = 1 \rightarrow \dfrac{2a\times 1}{a\times 1^2+1} = 1 \end{cases}$

on obtient $\begin{cases} \ln(a+1)+b = 3 \\ \dfrac{2a}{a+1} = 1 \rightarrow 2a = a+1 \rightarrow \boxed{a = 1} \end{cases}$

et on en déduit $\ln(1+1)+b = 3 \rightarrow \boxed{b = 3 - \ln 2}$

on remplace a par 1

Partie B

1) on a $f(-x) = \ln((-x)^2+1)+3-\ln 2$
$= \ln(x^2+1)+3-\ln 2 = f(x)$ → fonction paire

2) on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

Donc on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$

3) on a $(\ln(x^2+1))' = \dfrac{2x}{x^2+1}$ → $\boxed{f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}}$

on obtient :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x^2+1$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $3-\ln 2$ | ↗ | $+\infty$ |

$f(0) = \underbrace{\ln 1}_{=0} + 3 - \ln 2$

4) pour k supérieur à $3-\ln 2$, $f(x)$ "passera" bien deux fois par cette valeur k

→ $f(x) = k$ a deux solutions pour $k \in \,]3-\ln 2 ; +\infty[$

5) on résout $f(x) = 3 + \ln 2$

soit $\ln(x^2+1) + 3 - \ln 2 = 3 + \ln 2$

soit $\ln(x^2+1) = 2\ln 2 = \ln 2^2 = \ln 4$

On en déduit : $x^2 + 1 = 4 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow \boxed{x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}}$

Partie C

1) une lecture graphique reste incertaine mais il semble y avoir un changement de courbure et donc des points d'inflexion en $-1$ et en $1$

2) on a $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

$\rightarrow$ on applique $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ pour calculer $f''(x)$

$\rightarrow f''(x) = \dfrac{2(x^2+1) - 2x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2+1)^2}$

soit $f''(x) = \dfrac{2 - 2x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

3) on étudie le signe de $f''(x)$

$\rightarrow$ on résout $1 - x^2 = 0 \rightarrow x = 1$ ou $x = -1$

$\rightarrow$ on obtient

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2(1-x^2)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $(x^2+1)^2$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | concave | | convexe | | concave | |

les 2 points d'inflexion.

$\rightarrow f$ est convexe sur $[-1 ; 1]$.