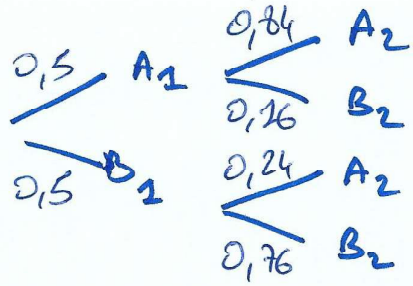
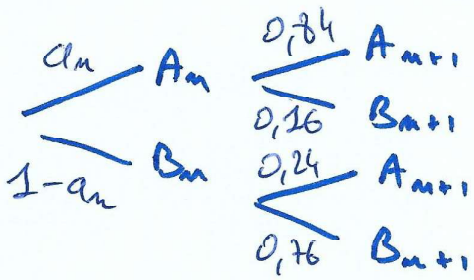
Bac Spé Maths 2022
Voici la correction complète
de l'épreuve 2
Amérique du Nord 2022

Exercice 1

① 

② a) $a_2 = p(A_2) =$ proba. totales $= 0,5 \times 0,84 + 0,5 \times 0,24 = \boxed{0,54}$

b) on cherche $p_{A_2}(B_1) = \dfrac{p(A_2 \cap B_1)}{p(A_2)} = \dfrac{0,5 \times 0,24}{0,54} = \boxed{0,222}$

③ a) 

b) on a $a_{n+1} = p(A_{n+1}) =$ proba. totales

$$= a_n \times 0,84 + (1-a_n) \times 0,24$$

$$= 0,84 a_n + 0,24 - 0,24 a_n$$

$\rightarrow \boxed{a_{n+1} = 0,6\, a_n + 0,24}$

④ <u>Init</u> $\rightarrow$ cela commence pour $n = 1$!!

on a : $a_1 = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{1-1}$

$= 0,6 - 0,1 \times 0,6^0 = 0,6 - 0,1 = \boxed{0,5}$ OK

<u>Hérédité</u> $\rightarrow$ on part de

$$a_{n+1} = 0,6\, a_n + 0,24$$

$$= 0,6\,(\underbrace{0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}}_{\text{c'est la formule supposée de } a_n}) + 0,24$$

$$= 0,36 - 0,1 \times \underbrace{0,6 \times 0,6^{n-1}}_{0,6^n} + 0,24$$

soit $a_{n+1} = 0,6 - 0,1 \times 0,6^n \rightarrow$ OK

⑤ on a $-1 < 0,6 < 1 \rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} 0,6^{n-1} = 0$

et donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0,6}$

→ à terme, il y a 60% de chances que le vélo se trouve au point A.

⑥ on résout $0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1} \geq 0,599$

$\rightarrow -0,1 \times 0,6^{n-1} \geq -0,001$

$\rightarrow 0,6^{n-1} \leq 0,01$ ← $\frac{-0,001}{-0,1}$

⚠

$\rightarrow \ln 0,6^{n-1} \leq \ln 0,01$

$\rightarrow (n-1) \times \ln 0,6 \leq \ln 0,01$

$\rightarrow n-1 \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,6}$

⚠ car $\ln 0,6$ est négatif

soit $n-1 \geq 9,01$

soit $n \geq 10,01 \rightarrow$ à partir de $\boxed{n = 11}$

→ à partir du 11e matin, on a plus de 59,9% de chances d'avoir le vélo au point A.

Exercice 2

Partie A

① on a $p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$

$\rightarrow \Delta = -24 < 0 \rightarrow$ pas de racines.

on obtient :

x	-3		4
$p'(x)$		$+$	
$p(x)$		$\nearrow$	

② c'est le corollaire du TVI

avec p fonction continue et strict. croissante sur $[-3;4]$

et $p(-3) = -68$ soit $0 \in [-68;37]$

$p(4) = 37$

intervalle image

Donc $p(x)=0$ admet bien une unique solution sur $[-3;4]$.

③ on obtient $\alpha \approx -0,2$ (on a $-0,2 < \alpha < -0,1$)

avec un tableau de valeurs sur la calculatrice !!

④ on en déduit

x	-3		α		4
$p(x)$		$-$	0	$+$	

soit

x	-3		α		4
$p(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

① ⓐ on applique $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

soit $f'(x) = \frac{e^x(1+x^2) - e^x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(x^2-2x+1)}{(1+x^2)^2}$

ⓑ on résout $f'(x) = 0$ pour avoir une tangente horizontale

$\rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x-1)^2 = 0$

soit $x = 1 \rightarrow$ OK

② ⓐ il semble bien y avoir deux points d'inflexion avec changement de concavité

$\rightarrow$ environ en $-0,5$

et en 1

③ on fait le tableau de signes de $f''(x)$.

→ $p(x) = 0$ pour α (voir partie A)

$x - 1 = 0$ pour $x = 1$

on obtient donc, en détaillant le tableau,

x	-3		α		1		4
$p(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$		$+$	
$(1+x^2)^3$		$+$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		convexe		concave		convexe	

2 points d'inflexion !!

Exercice 3

① on calcule $AR = \sqrt{(x_R - x_A)^2 + \dots} = \sqrt{0^2+3^2+2^2} = \sqrt{13}$

et $AT = \sqrt{(-3)^2+0^2+2^2} = \sqrt{13}$ $\rightarrow$ $\boxed{AR = AT}$

② on a $\vec{AR}.\vec{AT} = \begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix} = 0\times(-3)+3\times0+2\times2 = \boxed{4}$

③ on a $\underbrace{\vec{AR}.\vec{AT}}_{4} = \underbrace{AR}_{\sqrt{13}} \times \underbrace{AT}_{\sqrt{13}} \times \cos(\widehat{RAT})$

$\rightarrow$ $4 = \sqrt{13}\times\sqrt{13}\times\cos(\widehat{RAT})$ $\rightarrow$ $\widehat{RAT} = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{13}\sqrt{13}}\right)$

$\rightarrow$ $\boxed{\widehat{RAT} \approx 72{,}1°}$

② ⓐ on calcule $\vec{n}.\vec{AR} = \begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix} = 0$

et $\vec{n}.\vec{AT} = \begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix} = 0$

ⓑ on obtient pour (ART) : $2x - 2y + 3z + d = 0$

or $A \in (ART)$ $\rightarrow$ $2\times6 - 2\times0 + 3\times2 + d = 0$

$\rightarrow$ $18 + d = 0$ $\rightarrow$ $d = -18$

soit pour le plan (ART) : $\boxed{2x - 2y + 3z - 18 = 0}$

③ ⓐ on donne $\begin{cases} x = \boxed{3} + \boxed{2}k \\ y = \boxed{\frac{5}{2}} - \boxed{2}k \\ z = \boxed{0} + \boxed{3}k \end{cases}$

on reconnait le point S

on reconnait $\vec{n}$ qui est forcément un vecteur directeur de Δ

ⓑ on peut directement chercher l'intersection de Δ et de (ART)

$\rightarrow$ on "met" Δ dans l'équation de (ART).

$\rightarrow$ $2(3+2k) - 2\left(\frac{5}{2} - 2k\right) + 3(3k) - 18 = 0$

soit $-27 + 17k = 0 \rightarrow k = 1$

et on obtient bien le point L $\begin{cases} x = 3 + 2\times 1 = 5 \\ y = \frac{5}{2} - 2\times 1 = 1/2 \\ z = 3\times 1 = 3 \end{cases}$

4) a) on vérifie déjà que les points K, N et D sont alignés c'est à dire que $\vec{KN}$ et $\vec{KD}$ sont colinéaires.

on a $\vec{KN}\begin{pmatrix} 0 - 0 = 0 \\ 8-4t - 4 = 4-4t \\ 4t - 4 = 4t-4 \end{pmatrix}$ et $\vec{KD}\begin{pmatrix} 0-0=0 \\ 8-4=4 \\ 0-4=-4 \end{pmatrix}$

on a $\vec{KN} = (1-t)\times\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = (1-t)\,\vec{KD}$

Donc $\vec{KN}$ et $\vec{KD}$ sont colinéaires $\rightarrow$ K, N et D sont alignés.

De plus, avec $0 \leq t \leq 1$

on a $0 \leq 4t \leq 4$ et $-4 \leq -4t \leq 0$

soit $4 \leq 8-4t \leq 8$

$0 \leq z_N \leq 4$ $\qquad$ $4 \leq y_N \leq 8$

N est bien "entre" D et K !!

5) on veut $\vec{SL}\cdot\vec{SN} = 0$

or $\vec{SL}\cdot\vec{SN} = \begin{pmatrix} 5-3 \\ 1/2 - 5/2 \\ 3-0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0-3 \\ 8-4t-5/2 \\ 4t-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 11/2-4t \\ 4t \end{pmatrix}$

Donc $\vec{SL}\cdot\vec{SN} = 0$ correspond à résoudre

$2\times(-3) + (-2)\times(11/2 - 4t) + 3\times 4t = 0$

soit $-27 + 20t = 0$ soit $t = \frac{27}{20}$.

on obtient le point N $\begin{cases} 0 \\ 8 - 4\times\frac{27}{20} = \frac{23}{5} \\ 4\times\frac{27}{20} = \frac{27}{5} \end{cases}$

Exercice 4 → c'est le QCM.

Les réponses sont : 1) → d
2) → c
3) → d
4) → b
5) → d
6) → c

et voici quelques éléments de réponse.

Question 1 : on se souvient que $\sqrt{3} = 3^{1/2}$ 0!!

donc $a = \ln 9 + \ln 3^{1/2} - \ln 3 + \ln 1 - \ln 9$
$= \cancel{\ln 9} + \frac{1}{2}\ln 3 - \ln 3 - \cancel{\ln 9} = \boxed{-\frac{1}{2}\ln 3}$

Question 2 : il faut déjà que $x > 0$
et $x - 10 > 0 \rightarrow x > 10$
car sinon les expressions avec "ln" ne sont pas définies

on écrit ensuite : $\ln x + \ln(x-10) = \ln 3 + \ln 7$
soit $\ln x(x-10) = \ln(3 \times 7)$
soit $x(x-10) = 21$
soit $x^2 - 10x - 21 = 0$

on obtient $\Delta = 184 \rightarrow$ 2 solutions

$\rightarrow x_1 = \frac{10 + \sqrt{184}}{2} = 5 + \sqrt{46}$ qui est bien supérieur à 10

et $x_2 = 5 - \sqrt{46}$ qui n'est pas supérieur à 10

Donc x_1 est la $\boxed{\text{seule solution}}$ réelle

Question 3 : on a $f'(x) = 2x(-1+\ln x) + x^2 \times \left(\frac{1}{x}\right)$

$= -2x + 2x\ln x + x$

soit $f'(x) = -x + 2x\ln x$

on a $f'(\sqrt{e}) = -\sqrt{e} + 2\sqrt{e}\ln\sqrt{e}$ $= \ln e^{1/2} = \frac{1}{2}\ln e = \frac{1}{2}$!!

$= -\sqrt{e} + 2\sqrt{e} \times \frac{1}{2}$

$= 0$

et $f(\sqrt{e}) = (\sqrt{e})^2(-1+\ln\sqrt{e}) = e\left(-1+\frac{1}{2}\right) = -\frac{e}{2}$

on obtient l'équation de tangente :

$y = f'(\sqrt{e})(x-\sqrt{e}) + f(\sqrt{e})$

$= 0 \times (x-\sqrt{e}) + \left(-\frac{e}{2}\right) = \boxed{-\frac{e}{2}}$ ou $\boxed{-\frac{1}{2}e}$

Question 4 et 5 et 6 → une fois reconnue une loi binomiale, c'est très facile !!

Les paramètres sont : $n = 5$ et $p = p(J) = \frac{20}{50} = 0,4$

→ Question 4 : on cherche $p(X=2)$ → binomFdp

$\approx \boxed{0,346}$

→ Question 5 : on cherche $p(X \geq 1) = 1 - p(X=0)$

$\approx \boxed{0,922}$

→ Question 6 : on cherche $E(X) = n \times p = 5 \times 0,4$

$= \boxed{2}$