Bac Spé Maths 2022
Voici la correction complète
de l'épreuve 1
Métropole Antilles Guyane 2022

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

Partie A : 1) a) on a $\left(e^{-0,5t+1}\right)' = -0,5e^{-0,5t+1}$

$\rightarrow f'(t) = \underbrace{3e^{-0,5t+1}}_{u'\times v} + \underbrace{3t\times(-0,5)e^{-0,5t+1}}_{u\times v'}$

$= 3e^{-0,5t+1}(1-0,5t)$ en factorisant par $3e^{-0,5t+1}$

b) on a $3e^{-0,5t+1} > 0$ pour tout $t \in [0;10]$.

Donc le signe de f' dépend du signe de $1-0,5t$.

t	0		2		10
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

signe d'une fonction affine !!

on résout $-0,5t+1=0$

$\rightarrow t = \frac{-1}{-0,5} = 2$

c) cette question concerne le maximum.

il est atteint après $\boxed{2h}$, avec une quantité maximale égale à $f(2) = 3\times2\times e^{-0,5\times2+1} = \boxed{6\text{ mg}}$

2) a) sur $[0;2]$, on a le tableau suivant :

t	0	α	2
$f(t)$	$f(0)=0$	5	$f(2)=6$

$\rightarrow$ on applique le corollaire du TVI avec f continue et croissante sur $[0;2]$.

Et avec $5 \in [\underbrace{0}_{f(0)};\underbrace{6}_{f(2)}] \rightarrow$ unique solution pour $f(x)=5$.

$\rightarrow$ on obtient $\boxed{1,02 < \alpha < 1,03}$ avec la calculatrice

b) on résume à nouveau le tableau

t	0	α	2	β	$+\infty$
$f(t)$	$\nearrow$	5		5	$\searrow$

on veut $f(t) \geq 5$.

Partie B

COEFFICIENT MULTIPLICATEUR

1) Baisse de 30% $\to$ multiplication par $\left(1-\frac{30}{100}\right)=0,7$

$\to U_1 = 0,7 \times 2 + 1,8 = \boxed{3,2}$

2) on a bien : $U_{n+1} = \underbrace{0,7}_{\text{baisse de } 30\%} U_n + \underbrace{1,8}_{\text{on ajoute } 1,8}$.

3) a) Init : on a $\underset{(=2)}{U_0} \leq \underset{(=3,2)}{U_1} < 6 \to$ OK

Hérédité : on suppose $U_n \leq U_{n+1} < 6$

$\to 0,7U_n + 1,8 \leq 0,7U_{n+1} + 1,8 < 0,7 \times 6 + 1,8$

soit $U_{n+1} \leq U_{n+2} < 6 \to$ OK

b) on a $U_n \leq U_{n+1} \to (U_n)$ est croissante

on a $U_n < 6 \to (U_n)$ est majorée (par 6).

Donc (U_n) est croissante et majorée $\to$ $\boxed{\text{elle converge}}$.

c) on a $U_{n+1} = 0,7 U_n + 1,8$

$\to$ la limite ℓ va vérifier $\ell = 0,7\ell + 1,8$

soit $0,3\ell = 1,8 \to \ell = \frac{1,8}{0,3} = \boxed{6}$

4) on a $U_{n+1} = 0,7U_n + 1,8$

$V_n = 6 - U_n$

et donc $U_n = 6 - V_n$

$\to$ on a donc $V_{n+1} = 6 - U_{n+1}$

$= 6 - (0,7U_n + 1,8)$

$= 6 - 0,7(6 - V_n) - 1,8$

$= \cancel{6} - \cancel{4,2} + 0,7V_n - \cancel{1,8}$ $\quad 6 - 4,2 - 1,8 = 0$!!

soit $V_{n+1} = 0,7 V_n$

soit suite géo. de raison 0,7 et avec $V_0 = 6 - U_0$
$= 6 - 2 = 4$

b) on a donc $V_n = V_0 \times q^{(n-0)} = \boxed{4 \times 0{,}7^n}$

et $U_n = 6 - V_n = \boxed{6 - 4 \times 0{,}7^n}$

c) on veut $U_n \geq 5{,}5$

soit $6 - 4 \times 0{,}7^n \geq 5{,}5$

soit $-4 \times 0{,}7^n \geq -0{,}5$

soit $0{,}7^n \leq \dfrac{-0{,}5}{-4} = 0{,}125$

-4 est négatif ⚠

on obtient : $\ln 0{,}7^n \leq \ln 0{,}125$

$n \times \ln 0{,}7 \leq \ln 0{,}125$

$n \geq \dfrac{\ln 0{,}125}{\ln 0{,}7} \simeq 5{,}83$

$\ln 0{,}7$ est négatif ⚠⚠

soit au bout de 7 injections car le résultat correspond à U_6 avec U_0 qui est la 1^{ere} injection.

Exercice 2

① ⓐ on a $D \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \rightarrow \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

ⓑ avec $\boxed{t = -1}$, on a bien $\begin{cases} x = 1 + 2 \times (-1) = -1 \\ y = 2 - (-1) = 3 \\ z = 2 + 2 \times (-1) = 0 \end{cases}$

ⓒ on a $\vec{AB}\begin{pmatrix} -1-(-1) \\ 3-1 \\ 0-3 \end{pmatrix} \cdot \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{-8}$

② ⓐ P et D sont orthogonaux. Donc le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P.

On obtient donc pour le plan $P : 2x - 1y + 2z + d = 0$

or $A \in P \rightarrow 2 \times (-1) - 1 \times 1 + 2 \times 3 + d = 0$

soit $3 + d = 0 \rightarrow d = -3$

on obtient bien : $\boxed{2x - y + 2z - 3 = 0}$

ⓑ H est le point d'intersection de P et de D.

→ on "met" la droite D dans l'équation de P.

on obtient : $2(1+2t)-(2-t)+2(2+2t)-3=0$

soit $9t+1=0 \to t=-\frac{1}{9}$

et on obtient H $\begin{cases} x = 1+2\times(-\frac{1}{9}) = 7/9 \\ y = 2-(-\frac{1}{9}) = \frac{19}{9} \\ z = 2+2\times(-\frac{1}{9}) = \frac{16}{9} \end{cases}$

c) on calcule $AH = \sqrt{(x_H-x_A)^2+\dots\dots} = \sqrt{(\frac{7}{9}-(-1))^2+(\frac{19}{9}-1)^2+(\frac{16}{9}-3)^2}$

soit $AH = \sqrt{\frac{53}{9}} = \boxed{\frac{\sqrt{53}}{3}}$

3) a) H et B sont des points de la droite D

donc $\vec{HB}$ est colinéaire à $\vec{u}$, vecteur directeur de D

donc il existe k tel que $\vec{HB} = k\vec{u}$.

b) on a donc $\vec{HB}\cdot\vec{u} = k\vec{u}\cdot\vec{u} = k\|\vec{u}\|^2$

soit $k = \frac{\vec{HB}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$ or H est le projeté orthogonal de A sur D

donc $\vec{HB}\cdot\vec{u} = \vec{AB}\cdot\vec{u}$

(petit souvenir de 1ère !!)

c) on a $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} \to \|\vec{u}\| = \sqrt{2^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$

on a donc $k = \frac{-8}{3^2}$ — résultat du 1) c) $\longrightarrow$ $\boxed{k = -\frac{8}{9}}$

et on cherche H tel que $\vec{HB} = k\vec{u}$

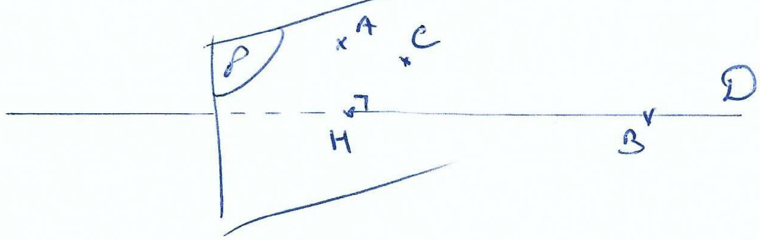
soit $\begin{pmatrix}-1-x_H\\3-y_H\\0-z_H\end{pmatrix} = -\frac{8}{9}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-16/9\\8/9\\-16/9\end{pmatrix}$

on obtient : $\begin{cases} x_H = -1+\frac{16}{9} = \boxed{\frac{7}{9}} \\ y_H = 3-\frac{8}{9} = \boxed{\frac{19}{9}} \\ z_H = \boxed{\frac{16}{9}} \end{cases}$

4) si on prend ACH comme base du tétraèdre, alors la hauteur sera égale à la distance entre B et son projeté orthogonal sur (ACH), c'est à dire sur (P)

$\longrightarrow$ la hauteur correspond donc à BH !!

→ voici un petit croquis pour bien visualiser



on calcule $BH = \sqrt{\left(\frac{7}{9}-(-1)\right)^2+\left(\frac{29}{9}-3\right)^2+\left(\frac{16}{9}-0\right)^2} = \sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{8}{3}$

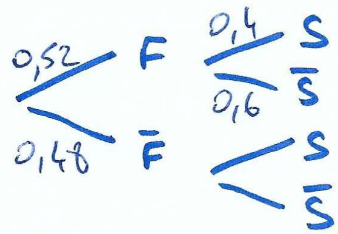
et, avec $\text{Volume}_{ABCH} = \frac{1}{3}\,\text{Aire}_{ACH} \times BH$,

on obtient $\frac{8}{9} = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{ACH} \times \frac{8}{3} \rightarrow \text{Aire}_{ACH} = \frac{8/9}{\frac{1}{3}\times\frac{8}{3}} = \boxed{1}$

Exercice 3

1) a) L'énoncé nous donne $p(S) = 25\% = 0,25$

b)



c) on a $p(F \cap S) = 0,52 \times 0,4$
$= \boxed{0,208}$

d) on cherche $p_S(F) = \frac{p(S \cap F)}{p(S)} = \frac{0,208}{0,25}$

$\rightarrow p_S(F) = \boxed{0,832}$

e) on cherche ici $p_{\bar{F}}(S) = \frac{p(\bar{F} \cap S)}{p(\bar{F})}$

et on va trouver $p(\bar{F} \cap S)$ à l'aide des proba. totales :

→ on a $\underbrace{p(S)}_{0,25} = \underbrace{p(F \cap S)}_{0,208} + \underbrace{p(\bar{F} \cap S)}_{?}$

→ on en déduit $p(\bar{F} \cap S) = 0,25 - 0,208 = 0,042$

et donc $p_{\bar{F}}(S) = \frac{0,042}{0,48} = 0,0875 = 8,75\% < 10\%$

→ OK

2) a) on a une loi binomiale de paramètres $n = 20$
et $p = p(S) = 0,25$
(car tirages identiques, indépendants, 2 issues possibles)

b) on cherche $p(X = 5) \approx \boxed{0,202}$ → binomFdp.

c) cet algorithme ajoute les résultats au fur et à mesure.

→ proba(5) correspond à "For i in range (0,6)"

cette instruction va de 0 à 5 !!

Donc, cet algorithme va calculer $p(X \leq 5)$,
soit la probabilité qu'il y ait <u>au plus</u> 5 salariés
qui ont suivi le stage

et, avec binomFRep, on obtient $p(X \leq 5) \approx \boxed{0,617}$

d) on cherche $p(X \geq 6)$

or on a $p(X \geq 6) = 1 - p(X \leq 5)$

$= 1 - 0,617 = \boxed{0,383}$.

3) cette question revient à calculer une moyenne
(ou une espérance).

→ on calcule $\underbrace{0,25}_{p(S)} \times 5\% + \underbrace{0,75}_{p(\overline{S})} \times 2\% = \boxed{2,75\%}$

Exercice 4 → c'est le QCM

Les bonnes réponses sont : 1 → c
2 → d
3 → c
4 → a
5 → d
6 → c

Voici quelques éléments de réponse :

Question 1 : il n'y a pas de valeurs interdites → les seules limites à calculer sont en $-\infty$ et $+\infty$.

→ on a $f(x) = \dfrac{\cancel{x^2}(-2+3/x-1/x^2)}{\cancel{x^2}(1+1/x^2)} = \dfrac{-2+3/x-1/x^2}{1+1/x^2}$

Donc on a $\lim\limits_{\pm\infty} f(x) = -2$ → asymptote horizontale $\boxed{y=-2}$

Question 2 : on a $(e^{x^2}) = \underbrace{2x}_{\text{ne pas oublier}} e^{x^2}$

Donc avec $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{1}{2}$, on a $F(0) = \frac{1}{2}e^{0} + \frac{1}{2} = 1$

et on a $F'(x) = \frac{1}{2}\times 2x e^{x^2} = xe^{x^2} = f(x)$

→ les deux conditions sont remplies.

Question 3 : on donne la courbe de f' et les questions concernent la concavité de f

→ on s'intéresse donc aux variations de f'.

→ f' est croissante sur $[0;2]$

→ f est convexe sur $[0;2]$.

On aurait pu s'aider du tableau suivant :

x	0	$\simeq 4$	$+\infty$
$f'(x)$	$\nearrow$		$\searrow$
$f(x)$	convexe		concave

Question 4 :

Les primitives F de la fonction f vérifient $F'(x)=f(x)$

or $f(x)>0$ pour tout x

Donc $F'(x)>0$ pour tout x

$\rightarrow$ les primitives F seront forcément croissantes.

Question 5 :

avec les croissances comparées, x^2 va "l'emporter" au dénominateur par rapport à $\ln x$.

Question 6 :

on peut presque se contenter d'utiliser la calculatrice (graphe + tableur) car il s'agit d'un QCM (seule la réponse importe !!).

MAIS sinon on pouvait résoudre $X^2+X-12=0$

$\rightarrow \Delta=49 \rightarrow$ 2 solutions

$\rightarrow X_1=-4$ et $X_2=3$

et en posant $X=e^x$, on fait le lien avec l'équation proposée

car $(e^x)^2+(e^x)-12=e^{2x}+e^x-12$!!

MAIS ATTENTION $X_1=e^{x_1}=-4$ n'a aucune solution

et seule $X_2=e^{x_2}=3$ donne une solution à l'équation.