

*Voici la correction complète
de l'épreuve 1 de Métropole 2022
du Mercredi 11 Mai 2022*

Exercice 1

Partie A

② a) on applique $(uv)' = u'v + uv'$

$$\text{avec } u(t) = 3t \rightarrow u'(t) = 3$$

$$v(t) = e^{-0,5t+1} \rightarrow v'(t) = -0,5e^{-0,5t+1}$$

$$\text{on obtient } f'(t) = 3 \times e^{-0,5t+1} + 3t \times (-0,5e^{-0,5t+1})$$

et si on prend $3e^{-0,5t+1}$ comme facteur commun, on obtient $f'(t) = 3e^{-0,5t+1}(1 - 0,5t)$

③ Puisque $3e^{-0,5t+1}$ est positif pour tout t , le signe de f' dépend de $(1 - 0,5t)$

t	0	2	10
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$			

on résout

$$1 - 0,5t = 0$$

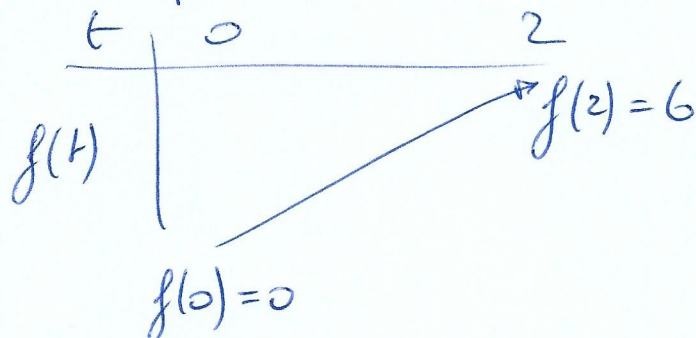
$$\rightarrow t = \frac{-1}{-0,5} = 2$$

signe d'une fonction affine !!

④ on observe le maximum !

il est atteint après 2h, pour une quantité maximale égale à $f(2) = 3 \times 2 \times e^{-0,5 \times 2 + 1} = 6 \text{ mg}$

② a) c'est une application du Tvi



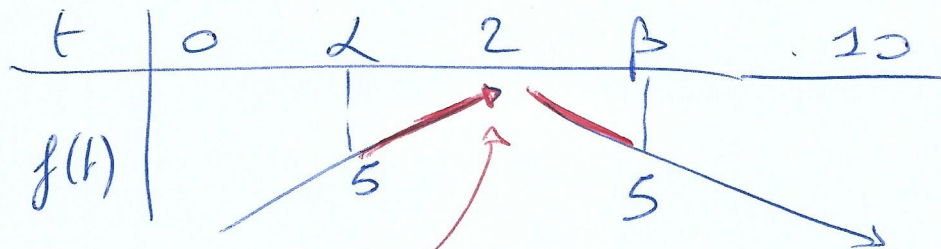
La fonction f est continue et strict. croissante
 sur $[0; 2]$ avec $f(0) = 0$ et $f(2) = 6$
 On a bien $5 \in [0; 6]$ (intervalle image)

Donc d'après le ^{appartient} corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 5$
 admet une unique solution sur $[0; 2]$

→ on a $\alpha \approx 1,03$

car $1,02 < \alpha < 1,03$

⑤ on résume le tableau de variations



→ on veut $f(t) \geq 5$

Donc il faut que t soit entre α et β !

→ on calcule $\beta - \alpha = 3,46 - 1,03 = 2,43$ h

soit $2,43 \times 60$ min

≈ 146 min

Partie B

COEFFICIENT
MULTIPLICATEUR

1. Baisse de 30% $\rightarrow$ on multiplie par $(1 - \frac{30}{100})$
 $= 0,7$

$$\hookrightarrow U_1 = 0,7 \times 2 + 1,8 = \boxed{3,2}$$

2. on a bien $U_{n+1} = \underbrace{0,7}_{\text{baisse de 30\%}} U_n + \underbrace{1,8}_{\text{on ajoute 1,8}}$

3. (a) Init on a $U_0 = 2$ et $U_2 = 3,2$

Donc on a bien $U_0 \leq U_2 < 6$

Hérédité on suppose

$$U_n \leq U_{n+1} < 6$$

$$\hookrightarrow 0,7 U_n \leq 0,7 U_{n+1} < 4,2 \quad \leftarrow 0,7 \times 6$$

$$\hookrightarrow 0,7 U_n + 1,8 \leq 0,7 U_{n+1} + 1,8 < 6 \quad \leftarrow 4,2 + 1,8$$

Donc $U_{n+1} \leq U_{n+2} < 6$ (OK)

(b) on a $U_n \leq U_{n+1} \rightarrow$ suite croissante

on a $U_n < 6 \rightarrow$ suite majorée

Donc (U_n) est croissante et majorée $\rightarrow$ CONVERGENTE

(c) avec $U_{n+1} = 0,7 U_n + 1,8$,
la limite l va vérifier l'égalité:

$$l = 0,7 l + 1,8$$

$$\hookrightarrow l - 0,7 l = 1,8 \rightarrow 0,3 l = 1,8$$

$$\rightarrow l = \frac{1,8}{0,3} = \boxed{6}$$

4. a) on a $V_{n+1} = 6 - U_{n+1}$

$$= 6 - (0,7U_n + 1,8)$$

$$= 6 - 0,7U_n - 1,8$$

$$= 6 - 0,7(6 - V_n) - 1,8$$

$V_n = 6 - U_n$
dnc

$U_n = 6 - V_n$

soit $V_{n+1} = 6 - 4,2 + 0,7V_n - 1,8$

soit $V_{n+1} = 0,7V_n$ suite géo. raison 0,7
et $V_0 = 6 - U_0$
 $= 6 - 2 = 4$

b) on a dnc $\boxed{V_n} = V_0 \times 0,7^n = \boxed{4 \times 0,7^n}$
et $\boxed{U_n} = 6 - V_n = \boxed{6 - 4 \times 0,7^n}$

c) on veut $U_n \geq 5,5$

soit $6 - 4 \times 0,7^n \geq 5,5$ $\xrightarrow{5,5-6}$

soit $-4 \times 0,7^n \geq -0,5$

$0,7^n \leq \frac{-0,5}{-4} = 0,125$

$\rightarrow \ln 0,7^n \leq \ln 0,125$

$\rightarrow n \times \ln 0,7 \leq \ln 0,125$

$\xrightarrow{\text{négatif}} n \geq \frac{\ln 0,125}{\ln 0,7} \approx 5,83$

soit au bout
de 7 injections.
car cela
correspond
   U_6 et on
a U_0 qui correspond
   la 1  re injection.

Exercice 2

② a) on prend $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ à cause de $\begin{cases} \dots 2t \\ \dots -t \\ \dots 2t \end{cases}$

③ avec $t = -1$, on obtient bien $\begin{cases} x = 1 + 2 \times (-1) = -1 \\ y = 2 - (-1) = 3 \\ z = 2 + 2 \times (-1) = 0 \end{cases}$

$$\textcircled{c} \vec{AB} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 - (-1) \\ 3 - 1 \\ 0 - 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{soit } \vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 \times 2 + 2 \times (-1) + (-3) \times 2 = \boxed{-8}$$

② a) P est orthogonal à D donc $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan $P \rightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

on obtient pour le plan P : $2x + (-1)y + 2z + d = 0$

$$\text{et } A \in P \rightarrow 2 \times (-1) + (-1) \times 1 + 2 \times 3 + d = 0$$

$$\text{soit } 3 + d = 0 \rightarrow d = -3$$

$$\text{on obtient bien } \boxed{2x - y + 2z - 3 = 0}$$

$$\text{b) on a } D \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \text{ et } P: 2x - y + 2z - 3 = 0$$

$$\text{soit } 2(1 + 2t) - (2 - t) + 2(2 + 2t) - 3 = 0$$

$$\text{soit } 9t + 1 = 0 \rightarrow t = -\frac{1}{9}$$

$$\hookrightarrow \text{on obtient } H \begin{cases} x = 1 + 2 \times (-\frac{1}{9}) = \frac{7}{9} \\ y = 2 - (-\frac{1}{9}) = \frac{19}{9} \\ z = 2 + 2 \times (-\frac{1}{9}) = \frac{16}{9} \end{cases}$$

$$c) \text{ on calcule } AH = \sqrt{\left(\frac{7}{9} - (-1)\right)^2 + \left(\frac{19}{9} - 2\right)^2 + \left(\frac{16}{9} - 3\right)^2}$$

$$\text{soit } AH = \sqrt{\frac{53}{9}} = \frac{\sqrt{53}}{3}$$

③ a) H et B sont des points de D

Donc $\vec{HB}$ est colinéaire à $\vec{u}$, vecteur directeur de D
Donc il existe k tel que $\vec{HB} = k\vec{u}$.

b) on a donc $\vec{HB} \cdot \vec{u} = k\vec{u} \cdot \vec{u}$

$$\text{soit } \vec{HB} \cdot \vec{u} = k\|\vec{u}\|^2 \rightarrow k = \frac{\vec{HB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$$

or H est le projeté orthogonal de A sur D

$$\text{donc } \vec{HB} \cdot \vec{u} = \vec{AB} \cdot \vec{u} \text{ (petit souvenir de 1^{ère} !!)}$$

c) on a donc $k = \frac{-8}{9}$ car on a $\vec{u} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}$

$$\text{et } \|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9}$$

$$\text{soit } \|\vec{u}\|^2 = (\sqrt{9})^2 = 9 !$$

$\rightarrow$ on cherche H tel que $\vec{HB} = k\vec{u}$

$$\text{soit } \begin{pmatrix} -1 - x_H \\ 3 - y_H \\ 0 - z_H \end{pmatrix} = \frac{-8}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16/9 \\ 8/9 \\ -16/9 \end{pmatrix}$$

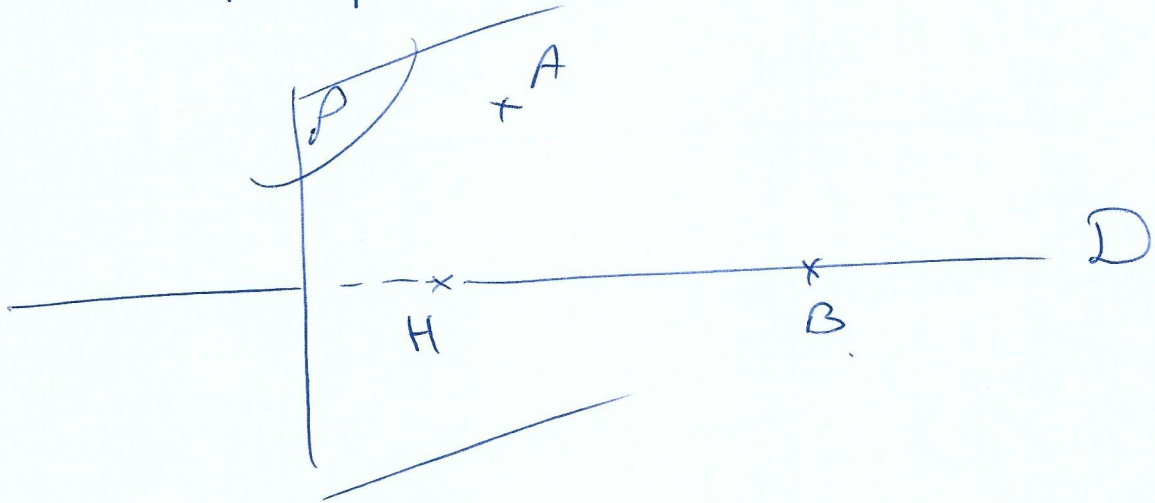
$$\text{soit } x_H = -1 + \frac{16}{9} = \frac{7}{9}$$

$$y_H = 3 - \frac{8}{9} = \frac{19}{9}$$

$$z_H = \frac{16}{9}$$

- 4) si on prend ACH comme base du tétraèdre, la hauteur sera égale à la distance entre B et son projeté orthogonal sur (ACH), soit sur (P).
 → la hauteur correspond donc à BH !!

Petit croquis pour visualiser



on calcule alors :

$$BH = \sqrt{\left(\frac{7}{9} - (-1)\right)^2 + \left(\frac{19}{9} - 3\right)^2 + \left(\frac{16}{9} - 0\right)^2}$$

$$\rightarrow BH = \sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{8}{3}$$

et avec $V = \frac{1}{3} \times B \times h$

on obtient $\frac{8}{9} = \frac{1}{3} \times B \times \frac{8}{3}$

soit Aire Base = B = $\frac{\frac{8}{9}}{\frac{1}{3} \times \frac{8}{3}} = \boxed{1}$

Exercice 3

1) a) L'énoncé nous donne $p(S) = 25\% = 0,25$

b)

$$\begin{array}{l} 0,52 \swarrow F \begin{array}{l} 0,4 \rightarrow S \\ 0,6 \rightarrow \bar{S} \end{array} \\ 0,48 \swarrow \bar{F} \begin{array}{l} \rightarrow S \\ \rightarrow \bar{S} \end{array} \end{array}$$

c) $p(F \cap S) = 0,52 \times 0,4 = 0,208$

d) on cherche $p_S(F) = \frac{p(F \cap S)}{p(S)} = \frac{0,208}{0,25} = \boxed{0,832}$

e) on cherche $p_{\bar{F}}(S) = \frac{p(\bar{F} \cap S)}{p(\bar{F})}$

on avec les p. proba. totales, on a :

$$\underbrace{p(S)}_{0,25} = \underbrace{p(F \cap S)}_{0,208} + \underbrace{p(\bar{F} \cap S)}_{?}$$

soit $p(\bar{F} \cap S) = 0,25 - 0,208 = 0,042$

et $p_{\bar{F}}(S) = \frac{0,042}{0,48} = 0,0875 = 8,75\% < 10\%$

OK

2) a) c'est une loi binomiale de paramètres

$$p = p(S) = 0,25 \text{ et } n = 20$$

(tirages identiques, indépendants, 2 issues possibles)

b) on cherche $p(X=5) \rightarrow$ binom Fdp $\boxed{\approx 0,202}$

c) cet algorithme ajoute les résultats au fur et à mesure

→ proba(S) correspond à "For i in range(0, 6)"

cette instruction
va de 0 à 5 !!

Donc cet algorithme va calculer $P(X \leq 5)$ ici,
soit la probabilité qu'il y ait au plus 5 salariés
qui ont suivi le stage
→ on utilise binom f rep → $\boxed{\approx 0,617}$

d) on cherche $P(X \geq 6)$
or $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5)$
 $= 1 - 0,617 \approx \boxed{0,383}$

$\boxed{3}$ on calcule $\underbrace{0,25}_{P(S)} \times 5\% + \underbrace{0,75}_{P(\bar{S})} \times 2\%$
soit $\boxed{2,75\%}$

Exercice 4

Les bonnes réponses du QCM sont :

Question 1 → réponse (c)

Question 2 → réponse (d)

Question 3 → réponse (c)

Question 4 → réponse (a)

Question 5 → réponse (d)

Question 6 → réponse (c)

Voici quelques éléments pour les réponses pour vous (même si ce n'est pas demandé dans un QCM).