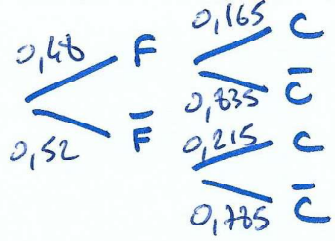
Bac Spé Maths 2022
Voici la correction complète
de l'épreuve 2
Centres Etrangers Liban 2022

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1 :

①



② $p(F \cap C) = 0{,}48 \times 0{,}165 = \boxed{0{,}0792}$

③ ① $p(C) =$ proba. totales

$= p(F \cap C) + p(\bar{F} \cap C)$

$= 0{,}0792 + 0{,}52 \times 0{,}215$

$= \boxed{0{,}191}$

② on a $p(F) = 0{,}48$ et $p(C) = 0{,}191$

$\rightarrow p(F) \times p(C) = 0{,}09168 \neq \underbrace{p(F \cap C)}_{= 0{,}0792}$ → événements non indépendantes

④ on a $P_C(F) = \dfrac{p(C \cap F)}{p(C)} = \dfrac{0{,}0792}{0{,}191} \approx \boxed{0{,}415}$

→ parmi les cadres, il y a 41,5% de femmes

⑤ ① Tirages identiques et indépendants avec 2 issues possibles

→ loi binomiale : $n = 15$ et $p = p(C) = 0{,}191$.

② $p(X \leq 1) \approx 0{,}189$ → avec binomFRep

③ on a $E(X) = n \times p = 15 \times 0{,}191 = \boxed{2{,}865}$

④ on veut $p(X \geq 1) \geq 0{,}99$

soit $1 - p(X = 0) \geq 0{,}99$

soit $p(X = 0) \leq 0{,}01$

soit $\underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} \times \underbrace{p^0}_{=1} \times (1-p)^{n-0} \leq 0{,}01$

$\rightarrow 0{,}809^n \leq 0{,}01$

$\rightarrow \ln 0{,}809^n \leq \ln 0{,}01$

$\rightarrow n \times \ln 0{,}809 \leq \ln 0{,}01$

$\rightarrow n \geq \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}809} \approx 21{,}7$

⚠ $\ln 0{,}809$ est négatif !!

soit à partir de $\boxed{22 \text{ salariés}}$.

Exercice 2

① ⓐ on peut utiliser le fait que les diagonales d'un carré sont perpendiculaires ou vérifier que $\vec{AH} \cdot \vec{ED} = 0$

$\rightarrow$ on a $\vec{AH}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \vec{ED}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = 0 \rightarrow$ OK

ⓑ cela semble tellement évident que cela peut être fastidieux de justifier avec des phrases.

$\rightarrow$ on peut calculer simplement $\vec{GH} \cdot \vec{ED} = 0$ et $\vec{GH} \cdot \vec{EH} = 0$

ⓒ on sait donc que $(AH) \perp (ED)$

et $(GH) \perp (EDH)$ soit $(GH) \perp (ED)$

Donc (ED) est orthogonale à 2 droites (AH) et (GH) du plan (AGH) $\rightarrow$ $(ED) \perp (AGH)$.

② $\vec{ED}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ est donc un vecteur normal à (AGH)

$\rightarrow$ on aura pour (AGH) : $0x + 1y - 1z + d = 0$

or $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \in (AGH) \rightarrow 0 \times 0 + 1 \times 0 - 1 \times 0 + d = 0 \rightarrow d = 0$

On obtient donc pour (AGH) : $\boxed{y - z = 0}$

③ ⓐ on a $\vec{EL}\begin{pmatrix}2/3 - 0\\1 - 0\\0 - 1\end{pmatrix}$ soit $\vec{EL}\begin{pmatrix}2/3\\1\\-1\end{pmatrix}$

on obtient pour (EL) : $\begin{cases} x = 0 + \frac{2}{3}t \\ y = 0 + 1t \\ z = 1 + (-1)t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$

point E vecteur $\vec{EL}$

ⓑ on "met" la droite (EL) dans le plan (AGH)

$\rightarrow$ $t - (1 - t) = 0$ soit $t = \frac{1}{2}$

et on obtient $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$

c) on vérifie déjà que $K \in (AGH)$

$\rightarrow$ on a bien $y_K - z_K = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow$ OK

et (KL) est orthogonale à (AGH) si le vecteur $\vec{KL}$ est colinéaire à $\vec{ED}$, vecteur normale à (AGH).

or on a $\vec{KL}\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ et $\vec{ED}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ soit $\vec{ED} = 2\vec{KL} \rightarrow$ OK

d) on calcule $KL = \sqrt{(x_L - x_K)^2 + \ldots\ldots}$

$$= \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e) Prenons AGH comme base et LK comme hauteur

AGH est un triangle rectangle en H.

diagonale d'un carré de côté 1

$\rightarrow$ Aire$_{AGH} = \frac{AH \times HG}{2} = \frac{\sqrt{2} \times 1}{2}$

et $LK = \frac{\sqrt{2}}{2}$

on a donc : Volume $= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{1}{6}}$

Exercice 3 → c'est le QCM.

Les bonnes réponses sont :

1 → b
2 → a
3 → c
4 → c
5 → b
6 → b
7 → c

et voici quelques explications :

Question 1 : on a $g'(x) = 1000x^{999} + 1$

$g''(x) = 1000 \times 999 x^{998}$ puissance paire

donc $g''(x)$ positif sur $\mathbb{R}$

g est convexe sur $\mathbb{R}$

Question 2 : on connait la courbe de f'

L'équation de la tangente en 0 sera :

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$

→ $f'(0) = 1$ d'après la courbe donnée

soit $y = 1 \times x + f(0) = x + f(0)$

→ la réponse a) est la seule possible (avec $f(0) = 0$!!)

Question 3 : On a $|U_n| = \frac{1}{n+1}$

valeur absolue

or $\frac{1}{n+1}$ est une suite décroissante avec $U_0 = 1$

et $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

Donc $|U_n|$ est bornée et donc (U_n) aussi

Question 4 : on a $v_0 \times v_1 < 0 \rightarrow k \times v_1 < 0$

v_1 est du signe opposé par rapport à k

on a $v_1 \times v_2 < 0$

v_2 est du signe opposé par rapport à v_1

Donc v_2 est du signe de k

On voit bien alors que :

v_2 et v_4 et v_6 et v_8 et v_{10} seront du signe de k.

<u>Question 5</u> : on a $w_{n+1} = 2w_n - 4 \rightarrow w_n = \frac{w_{n+1}+4}{2}$

soit $w_1 = \frac{w_2+4}{2} = \frac{8+4}{2} = 6$

et $w_0 = \frac{w_1+4}{2} = \frac{6+4}{2} = \boxed{5}$

<u>Question 6</u> : on pourrait montrer rapidement que $a_n > 0$ pour tout n.

on a alors $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^n}{e^n+1} < 1$ le dénominateur est supérieur au numérateur

$\rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \rightarrow a_{n+1} < a_n$.

<u>Question 7</u> : Les cellules se divisent en deux

<u>DONC</u> leur nombre se multiplie par deux !!

On aurait une suite géométrique de raison 2

avec $U_0 = 1$ soit $U_n = U_0 \times q^{(n-0)} = 1 \times 2^n$

soit $U_n = 2^n$

on vérifie que $U_{12} = 2^{12} = 4096 \approx 4000$

$\rightarrow$ il y a 12 étapes de division en $4^h = 240$ min

soit une division toutes les $\frac{240}{12} = 20$ min.

Exercice 4

Partie A : 1) on a $e^{-0} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \boxed{-\infty}$

2) on a $f'(x) = -e^{-x} + \frac{1}{x} = \frac{-xe^{-x}+1}{x}$

3) on a $0 < x \leq 1 \rightarrow -1 \leq -x < 0 \rightarrow e^{-1} \leq e^{-x} < e^{0}$

et on a $0 < x \leq 1$

or on peut "multiplier" les inégalités, toutes les bornes sont positives $\rightarrow e^{-1} \times 0 < xe^{-x} < e^{0} \times 1$

soit $0 < \boxed{xe^{-x} < 1}$

et donc $1 - xe^{-x} > 0$

soit $f'(x) > 0$ sur $]0;1]$

Donc f est croissante sur $]0;1]$.

4) on a le tableau suivant :

	0	ℓ	1
$f(x)$	$-\infty$	0	$f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

on peut appliquer le corollaire du TVI car 0 appartient bien à l'intervalle image $]-\infty; \frac{1}{e}]$ (f est bien croissante et continue sur $]0;1]$)

Partie B : 1) a) $a_1 = e^{-b_0} = e^{-1} \approx 0,37$

$b_1 = e^{-a_0} = e^{-\frac{1}{10}} \approx 0,90$

b) on aura :

$$\boxed{\begin{aligned} c &= \exp(-b) \\ b &= \exp(-a) \end{aligned}}$$

on a une variable c pour ne pas changer trop tôt la valeur de a

2) a) <u>Init</u> : on a bien $0 < a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0 \leq 1$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{e} & e^{-\frac{1}{10}} & 1 \\ & \approx 0{,}37 & \approx 0{,}90 & \end{array}$$

<u>Hérédité</u> : on suppose $0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1$

on obtient $e^{-0} > e^{-a_n} \geq e^{-a_{n+1}} \geq e^{-b_{n+1}} \geq e^{-b_n} \geq e^{-1}$

(la fonction $x \to e^{-x}$ est $\searrow$, elle INVERSE l'ordre)

$\to 1 > b_{n+1} \geq b_{n+2} \geq a_{n+2} \geq a_{n+1} \geq e^{-1}$

soit $(0 <)\ e^{-1} \leq a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq b_{n+2} \leq b_{n+1} < 1$ $\to$ OK

b) $a_n \leq a_{n+1} \to (a_n)$ est croissante
$a_n \leq 1 \to (a_n)$ est majorée $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Donc } (a_n) \text{ converge}}$

$b_{n+1} \leq b_n \to (b_n)$ est décroissante
$b_n > 0 \to (b_n)$ est minorée $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Donc } (b_n) \text{ converge}}$

3) a) on a $f(A) = e^{-A} + \ln A = e^{-A} + \ln e^{-B}$
$= B + (-B) = \boxed{0}$

b) De même, on a :
$f(B) = e^{-B} + \ln B = e^{-B} + \ln e^{-A}$
$= A + (-A) = \boxed{0}$

Donc A et B sont dans $]0;1]$ et ils sont solutions de $f(x) = 0$, qui n'a qu'une unique solution dans $]0;1]$ d'après la partie A.

Donc A et B sont égaux !

$\to \boxed{A - B = 0}$