Bac Spé Maths 2022

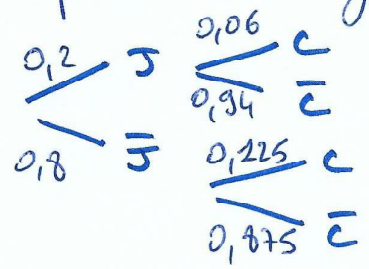
Voici la correction complète

de l'épreuve 1

Centres Etrangers Liban 2022

Exercice 1 → il est plutôt très facile !

Partie A : 1)



2) $p(J \cap C) = 0{,}2 \times 0{,}06 = \boxed{0{,}012}$

3) $p(C)$ = proba. totales $= p(J \cap C) + p(\bar{J} \cap C)$
$= 0{,}012 + 0{,}8 \times 0{,}125 = \boxed{0{,}112}$

4) on cherche $P_C(\bar{J}) = \dfrac{P(C \cap \bar{J})}{P(C)} = \dfrac{0{,}8 \times 0{,}125}{0{,}112} \approx \boxed{0{,}893}$

5) Parmi les "coupe-file", on a $P_C(J) = 1 - P_C(\bar{J})$
→ $P_C(J) = 1 - 0{,}893 = \boxed{0{,}107}$ soit $\boxed{10{,}7\% < 15\%}$

Partie B 1) $n = 30$ et $p = p(C) = 0{,}112$

2) on cherche $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) \approx 0{,}972$
→ binomFdp

3) on cherche $p(X \leq 1) \approx 0{,}136$
→ binomFRep

4) Pour une loi binomiale, $E(X) = n \times p = 30 \times 0{,}112 = 3{,}36$ skieurs

Exercice 2 → c'est le QCM !

Les réponses sont :
1 → c
2 → d
3 → b
4 → c
5 → b
6 → d
7 → b

Avec les éléments de réponse, sur la page suivante :

Question 1 : Diminution de 15% → $\times 0{,}85$

on a donc une suite géo : $U_n = \underbrace{1}_{u_0} \times \underbrace{0{,}85}_{q}{}^n$

→ on teste et $u_8 \approx 0{,}27$; $U_9 \approx 0{,}23 < 0{,}25$ L. → c

Question 2 : on voit que si $U_n = 6$ alors $U_{n+1} = \frac{1}{2} \times 6 + 3 = 6$

→ la suite est constante ! → d

Question 3 : $f(2x) = 4 \times \ln(3 \times 2x) = 4 \ln(2 \times 3x)$

$= 4(\ln 2 + \ln 3x)$

→ $f(2x) = 4 \ln 2 + 4 \ln(3x) = \ln 2^4 + 4 \ln 3x$

$= \ln 16 + f(x)$ → b

Question 4 : $\boxed{\text{en } 1^+}$, on a une forme indéterminée mais on reconnait la notion de nombre dérivé de 1ère.

on a $\frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln x - \ln 1}{x-1}$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = f'(1)$ avec $f(x) = \ln x$

on obtient : $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ soit $f'(1) = 1$.

et donc $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ → pas d'asymptote !

$\boxed{\text{en } +\infty}$, c'est plus simple, ouf !!

avec les croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = 0$

soit une asymptote horizontale → c

Question 5 : on résout $h(x) = 0$ sur $I = [\frac{1}{e} ; 2]$

on obtient $x^2 = 0$ ou $1 + 2\ln x = 0$

$x = 0$; $\ln x = -\frac{1}{2}$

mais $0 \notin I$; soit $x = e^{-1/2} \in I$

→ b

Question 6 : on sait que

$y = h'(\sqrt{e})(x - \sqrt{e}) + h(\sqrt{e})$

On remplace et on obtient :

$$y = 4\sqrt{e}\,(1+\ln\sqrt{e})(x-\sqrt{e}) + (\sqrt{e})^2(1+2\ln\sqrt{e})$$

avec $\ln\sqrt{e} = \ln e^{1/2} = \frac{1}{2}\ln e = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$!!

soit $y = 4\sqrt{e}\left(1+\frac{1}{2}\right)(x-\sqrt{e}) + e\left(1+2\times\frac{1}{2}\right)$

$= 6\sqrt{e}(x-\sqrt{e}) + 2e = 6\sqrt{e}\,x - 4e \rightarrow$ d

ou $e^{1/2}$

Question 7 on calcule $h''(x) = 4(1+\ln x) + 4x\times\frac{1}{x}$

soit $h''(x) = 4 + 4\ln x + 4 = 8 + 4\ln x$

on résout $h''(x) = 0 \rightarrow 8 + 4\ln x = 0 \rightarrow \ln x = -2$

$\rightarrow x = e^{-2} \in]0;2]$

$\rightarrow$ b

Exercice 3

limite du type $(1+(-\infty)-0)$

Partie A : ① ⓐ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

ⓑ on développe $1+0{,}5x\left(2-\frac{e^{0{,}5x}}{0{,}5x}\times e^{-2}\right) = 1+1x-e^{-2}\times e^{0{,}5x}$

$= 1+x-e^{0{,}5x-2} = f(x)$.

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{0{,}5x}}{0{,}5x} = +\infty$ (croissances comparées).

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{e^{0{,}5x}}{0{,}5x}\times e^{-2}\right) = -\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\underbrace{0{,}5x}_{+\infty}\times\underbrace{\left(2-\frac{e^{0{,}5x}}{0{,}5x}\times e^{-2}\right)}_{-\infty} = -\infty$

② ⓐ on a $(e^{0{,}5x-2})' = 0{,}5e^{0{,}5x-2}$

ne pas oublier !

Donc $f'(x) = 1-0{,}5e^{0{,}5x-2}$

ⓑ $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1-0{,}5e^{0{,}5x-2} < 0$

soit $0{,}5e^{0{,}5x-2} > 1$

soit $e^{0{,}5x-2} > 1/0{,}5 = 2$!!

soit $0{,}5x-2 > \ln 2$ (en appliquant "ln").

soit $x > \frac{2+\ln 2}{0{,}5} = 4+2\ln 2$!!

$\rightarrow x \in]4+2\ln 2 ; +\infty[$.

③

x	$-\infty$		$2\ln 2+4$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$3+2\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

$f(2\ln 2+4) = 1+2\ln 2+4-e^{0{,}5(2\ln 2+4)-2}$

$= 5+2\ln 2-e^{\ln 2}$

$= 5+2\ln 2-2 = 3+2\ln 2$

④ on a $2\ln 2+4 \simeq 5{,}4$

Donc $[-1;0]$ est inclus dans $]-\infty; 2\ln 2+4]$

La fonction est donc croissante sur $[-1;0]$ et continue.

On a $f(-1) = -e^{-2,5} < 0$
$f(0) = 1 - e^{-2} > 0$ $\rightarrow$ et le nombre 0 appartient bien à l'intervalle image $[-e^{-2,5} ; 1-e^{-2}]$

et, d'après le corollaire du TVI, unique solution ....

Partie B ① ② il est important de préciser que f est bien croissante sur $]-\infty ; 4]$.

Init : $\underset{(=0)}{U_0} \leq \underset{(=1-e^{-2})\ (\approx 0,85)}{U_1} \leq 4 \rightarrow$ OK

Hérédité : on suppose $U_n \leq U_{n+1} \leq 4$
on obtient $f(U_n) \leq f(U_{n+1}) \leq f(4)$ f est $\nearrow$ et CONSERVE l'ordre !!
soit $U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 4$

③ $U_n \leq U_{n+1} \rightarrow (U_n)$ est croissante
$U_n \leq 4 \rightarrow (U_n)$ est majorée par 4

Donc (U_n) est croissante et majorée $\rightarrow$ elle converge.

② ⓐ $\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = 1 + \ell - e^{0,5\ell - 2}$
soit $e^{0,5\ell-2} = 1$
soit $0,5\ell - 2 = 0 \rightarrow \ell = \frac{2}{0,5} = \boxed{4}$

ⓑ La suite (U_n) prendra des valeurs supérieures à 3,99 pour $n = 12$ et les rangs d'après soit à partir du rang 12.

Exercice 4 ① ⓐ on a $R\begin{pmatrix}\frac{x_A+x_B}{2}\\ \dots\\ \dots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{5+1}{2}\\ \frac{0+4}{2}\\ \frac{-1+(-1)}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$

$x_B - x_A$

et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}$

ⓑ $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal $\rightarrow -4x+4y+0z+d=0$

$R \in P_1 \rightarrow -4\times3+4\times2+0\times(-1)+d=0$

$\rightarrow -4+d=0 \rightarrow d=4$

On obtient : $-4x+4y+4=0$ ou $x-y-1=0$ (en "divisant" par -4)

ⓒ on vérifie $x_E-y_E-1=0$ soit $10-9-1=0 \rightarrow$ OK

et on a $EA=\sqrt{(x_A-x_E)^2+\dots} = \sqrt{(-5)^2+(-9)^2+(-9)^2} = \sqrt{187}$

$EB=\sqrt{(x_B-x_E)^2+\dots} = \sqrt{(-9)^2+(-5)^2+(-9)^2} = \sqrt{187}$

$\rightarrow$ on a bien $\boxed{EA=EB}$

② ⓐ Les plans sont sécants si ils ne sont pas parallèles, et donc si leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires.

On a $\vec{n}_{P_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{n}_{P_2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \rightarrow$ non colinéaires

ⓑ L'intersection des plans est peu traitée le jour du BAC $\rightarrow$ révisez avec les FICHES MÉTHODES !!

On a $\begin{cases} x-y-1=0 \leftarrow \text{c'est } P_1 \\ x-z-2=0 \leftarrow \text{c'est } P_2 \\ \text{et on pose } z=t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y-1=0 \\ x=z+2=t+2 \\ z=t \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} y=x-1=t+2-1=t+1 \\ x=t+2 \\ z=t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=t+2 \\ y=t+1 \\ z=t \end{cases}$

③ cherchons directement l'intersection de Δ et de P_3

→ on "met" Δ dans l'équation de P_3.

on obtient : $1+t+t-3=0 \rightarrow -2+2t=0 \rightarrow t=1$

et on obtient le point $\Omega \begin{cases} x = 2+1 = 3 \\ y = 1+1 = 2 \\ z = 1 \end{cases}$

④ ⓐ on utilise l'énoncé !!

$\Omega \in$ à P_3 et à Δ (qui est l'intersection de P_1 et de P_2)

Donc Ω appartient à P_1, P_2 et P_3 qui sont des plans médiateurs de [AB], [AC] et [AD]

$\Omega A = \Omega B$ $\quad$ $\Omega A = \Omega C$ $\quad$ $\Omega A = \Omega D$

on a bien $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$.

⑤ D'après le résultat ci dessus, les points A, B, C et D appartiennent à une sphère de centre Ω et de rayon ΩA (par exemple)

avec $\Omega A = \sqrt{2^2+(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{12}$
$= 2\sqrt{3}$.