

Tableau de signes et inéquation avec quotients et fractions

En classe de seconde, tant que l'on n'a pas de nouveaux outils mathématiques, toutes les inéquations s'écrivant avec x^2 , x^3 (etc..) ou avec des x au dénominateur devront toujours se ramener à une *inéquation avec juste le nombre 0 à droite*.

Il faudra donc faire toutes les transformations nécessaires (*factoriser, réduire au même dénominateur ..*) pour retrouver des situations traitées dans les fiches précédentes avec la réalisation de tableaux de signes.

L'énoncé

Résoudre l'inéquation $\frac{x+1}{x-2} < 3$

Le piège à éviter

Attention, si vous commencez votre travail en faisant un produit en croix ou en "faisant passer" $x-2$ pour obtenir $x+1 < 3(x-2)$, vous êtes sur une fausse piste et une mauvaise méthode

La méthode

On veut résoudre l'inéquation $\frac{x+1}{x-2} < 3$

Étape 1 : on commence en "faisant passer" le 3 à gauche afin de bien avoir le nombre 0 à droite. Et on *réduit au même dénominateur* cette "nouvelle" expression de gauche.

Étape 2 : on obtient alors un quotient de fonctions affines dont on fait le *tableau de signes*.

Étape 3 : on conclut avec l'*ensemble solution* de l'inéquation proposée.

Il ne faudra pas oublier la "double barres" pour le nombre 2 qui est une valeur interdite.

Étape 1 : on manipule l'inéquation afin de pouvoir faire un tableau de signes.

$$\text{On a } \frac{x+1}{x-2} < 3 \rightarrow \frac{x+1}{x-2} - 3 < 0 \rightarrow \frac{x+1}{x-2} - \frac{3(x-2)}{(x-2)} < 0$$

$$\text{on obtient } \frac{x+1 - 3(x-2)}{(x-2)} < 0 \text{ soit } \frac{-2x+7}{x-2} < 0$$

(on développe avec -3!)

Étape 2 : on fait le tableau de signes du quotient de fonctions affines $\frac{-2x+7}{x-2}$.

$$\begin{aligned} \text{On résout } -2x+7=0 & \quad \text{et } x-2=0 \\ x = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2} = 3,5 & \quad x = 2 \end{aligned}$$

x	-∞	2	3,5	+∞
Signes de $-2x+7$	+		+ 0	-
Signes de $x-2$	-	0		+
Signes de $\frac{-2x+7}{x-2}$	[-		+ 0	-]

⚠ double barres pour la valeur interdite! ↖ on veut < 0 ↗

Étape 3 : on conclut en utilisant le tableau de signes de $\frac{-2x+7}{x-2}$, qui est l'expression transformée de l'inéquation initiale avec "... < 0", ce qui nous amène à prendre les signes négatifs du tableau.

L'ensemble solution est: $S =]-\infty; 2[\cup]3,5; +\infty[$