Tableau de signes et inéquation après une factorisation : les exercices

Je vais proposer ici un certain nombre de situations qui nécessitent une factorisation avant de pouvoir réellement résoudre l'inéquation proposée.
Impossible bien sûr d'être totalement exhaustif mais cela devrait déjà constituer une bonne base de travail !!

Exercice 1

Résoudre l'inéquation $5x^2 - 10x \leqslant 0$

Exercice 2

Résoudre l'inéquation $(2x+3)^2 < (2x+3)(6x-5)$

Exercice 3

Résoudre l'inéquation $(2x+3)^2 - 4 > 0$

Exercice 4

Résoudre l'inéquation $(2x+3)^2 \geqslant (x-1)^2$

La solution de l'exercice 1

On cherche à résoudre l'inéquation $5x^2 - 10x \leqslant 0$

Etape 1 : on transforme l'expression proposée et on factorise cette expression.

On a $5x^2 - 10x = 5x \times x - 10 \times x$

$= x \times (5x - 10)$

x est le facteur commun.

Etape 2 : on obtient le tableau de signes de l'expression factorisée $x(5x-10)$

On résout : $x = 0$ <u>et</u> $5x - 10 = 0$

$5x = 10$

$x = \frac{10}{5} = 2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signes de x coefficient 1 positif → signes du type $(- 0 +)$		$-$	0	$+$		$+$	
Signes de 5 x – 10 coefficient 5 positif → signes du type $(- 0 +)$		$-$		$-$	0	$+$	
Bilan du produit : *signes de x (5 x – 10)*		$+$	0	$\boxed{-}$	0	$+$	

on veut ≤ 0

Etape 3 : on peut conclure à partir du tableau de signes de cette expression factorisée car il y a une équivalence avec l'inéquation initiale.

→ résoudre $5x^2 - 10x \leq 0$

revient à résoudre $x(5x - 10) \leq 0$

→ l'ensemble solution est : $S = [0 ; 2]$

les crochets sont fermés car on peut être "<u>égal</u> à..."

La solution de l'exercice 2
On cherche à résoudre l'inéquation $(2x+3)^2 < (2x+3)(6x-5)$

Etape 1 : on transforme l'expression proposée et on factorise cette expression.

on part de : $(2x+3)^2 < (2x+3)(6x-5)$

et on obtient : $(2x+3)^2 - (2x+3)(6x-5) < 0$

soit $(2x+3)(2x+3) - (2x+3)(6x-5) < 0$

Facteur commun !

soit $(2x+3)\big((2x+3) - (6x-5)\big) < 0$

soit $(2x+3)(2x+3-6x+5) < 0$

soit $(2x+3)(-4x+8) < 0$

Etape 2 : on obtient le tableau de signes de l'expression factorisée $(2x+3)(-4x+8)$

on résout : $2x+3=0$ et $-4x+8=0$

$2x=-3$ $\qquad$ $-4x=-8$

$x=\frac{-3}{2}=-1{,}5$ $\qquad$ $x=\frac{-8}{-4}=2$

x	$-\infty$		$-1{,}5$		2		$+\infty$
Signes de $(2x+3)$ coefficient 2 positif → signes du type $(-\ 0\ +)$		$-$	0	$+$		$+$	
Signes de $(-4x+8)$ coefficient -4 négatif → signes du type $(+\ 0\ -)$		$+$		$+$	0	$-$	
Bilan du produit : signes de $(2x+3)(-4x+8)$		$\boxed{-}$	0	$+$	0	$\boxed{-}$	

on veut < 0

Etape 3 : on peut conclure à partir du tableau de signes de cette expression factorisée car il y a une équivalence avec l'inéquation initiale.

→ résoudre $(2x+3)^2 < (2x+3)(6x-5)$
revient à résoudre $(2x+3)(-4x+8) < 0$

→ L'ensemble solution est : $S =]-\infty ; -1{,}5[\cup]2 ; +\infty[$

La solution de l'exercice 3

On cherche à résoudre l'inéquation $(2x+3)^2 - 4 > 0$

Etape 1 : on transforme l'expression proposée et on factorise cette expression.

On va factoriser en utilisant $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

On a $(2x+3)^2 - 4 > 0$

soit $(\underbrace{2x+3}_{a})^2 - \underbrace{2}_{b}^2 > 0$

soit $(\underbrace{2x+3}_{a} \underbrace{-}_{-} \underbrace{2}_{b})(\underbrace{2x+3}_{a} \underbrace{+}_{+} \underbrace{2}_{b}) > 0$

soit $(2x+1)(2x+5) > 0$

Etape 2 : on obtient le tableau de signes de l'expression factorisée $(2x+1)(2x+5)$

on résout : $2x+1=0$ et $2x+5=0$

$2x=-1$ $\quad$ $2x=-5$

$x=-\frac{1}{2}=-0,5$ $\quad$ $x=-\frac{5}{2}=-2,5$

x	$-\infty$		$-2,5$		$-0,5$		$+\infty$
Signes de $(2x+1)$ coefficient 2 positif → signes du type $(-\ 0\ +)$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Signes de $(2x+5)$ coefficient 2 positif → signes du type $(-\ 0\ +)$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Bilan du produit : signes de $(2x+1)(2x+5)$		$\boxed{+}$	0	$-$	0	$\boxed{+}$	

on veut > 0

Etape 3 : on peut conclure à partir du tableau de signes de cette expression factorisée car il y a une équivalence avec l'inéquation initiale.

→ résoudre $(2x+3)^2 - 4 > 0$

revient à résoudre $(2x+1)(2x+5) > 0$

→ l'ensemble solution est : $S =]-\infty ; -2,5[\cup]-0,5 ; +\infty[$

les crochets sont ouverts car on ne peut pas être "égal à..."

La solution de l'exercice 4

On cherche à résoudre l'inéquation $(2x+3)^2 \geqslant (5x-1)^2$

Etape 1 : on transforme l'expression proposée et on factorise cette expression.

On va factoriser en utilisant $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

on part de : $(2x+3)^2 \geqslant (5x-1)^2$

on obtient : $(\underbrace{2x+3}_{a})^2 - (\underbrace{5x-1}_{b})^2 \geqslant 0$

soit $\left(\underbrace{(2x+3)}_{a} \underbrace{-}_{-} \underbrace{(5x-1)}_{b}\right)\left(\underbrace{(2x+3)}_{a} \underbrace{+}_{+} \underbrace{(5x-1)}_{b}\right) \geqslant 0$

soit $(2x+3-5x+1)(2x+3+5x-1) \geqslant 0$

soit $(-3x+4)(7x+2) \geqslant 0$

Etape 2 : on obtient le tableau de signes de l'expression factorisée $(-3x+4)(7x+2)$

on résout : $-3x+4=0$ et $7x+2=0$

$-3x=-4$ $7x=-2$

$x = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$ on garde les valeurs EXACTES ! $x = -\frac{2}{7}$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{7}$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
Signes de $(-3x+4)$ coefficient -3 négatif → signes du type $(+\ 0\ -)$		$+$		$+$	0	$-$	
Signes de $(7x+2)$ coefficient 7 positif → signes du type $(-\ 0\ +)$		$-$	0	$+$		$+$	
Bilan du produit : signes de $(-3x+4)(7x+2)$		$-$	0	$\boxed{+}$	0	$-$	

on veut $\geqslant 0$

Etape 3 : on peut conclure à partir du tableau de signes de cette expression factorisée car il y a une équivalence avec l'inéquation initiale.

→ résoudre $(2x+3)^2 \geqslant (5x-1)^2$

revient à résoudre (

→ l'ensemble solution est : $S = \left[-\frac{2}{7} \,;\, \frac{4}{3}\right]$