Le théorème des valeurs intermédiaires (ou T V I)

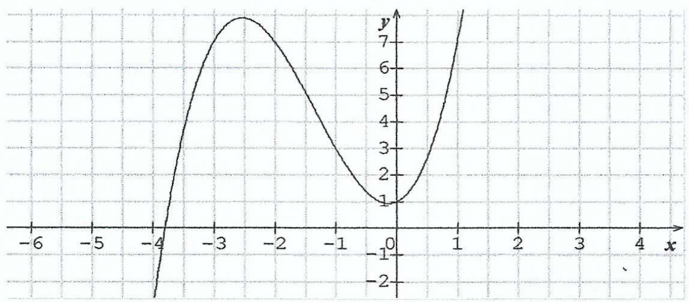
Il va nous permettre de *formaliser* à l'aide d'un *théorème* (et d'une *rédaction type*) un résultat qu'il était possible jusque là d'obtenir avec un graphique ou avec un tableau de variations.

La question à résoudre

Montrer qu'un nombre 5 possède **au moins** un antécédent par une fonction f
c'est à dire
Montrer que l'équation $f(x) = 5$ possède **au moins** une solution.

La vision graphique

On sait déjà répondre à la question posé si on nous donne la courbe et si on nous demande de fournir une réponse graphique.



Sur le graphique ci-dessus, on voit que la fonction "passe" *trois fois* par le nombre 5,
c'est à dire que le nombre 5 possède trois antécédents sur l'intervalle [- 4 ; 3],
c'est à dire que l'équation $f(x) = 5$ possède trois solutions sur l'intervalle [- 4 ; 3].

L'énoncé type

On considère une fonction f définie sur [- 4 ; 3] par $f(x) = x^3 + 4x^2 + x + 1$
On va montrer que l'équation $f(x) = 5$ possède au moins une solution dans l'intervalle [- 4 ; 3]

La solution

Inutile de tracer la courbe, il faut juste calculer les images respectives des nombres – 4 et 3 afin de vérifier que le nombre 5 se trouve bien dans l'intervalle formé par ces deux images.

* La fonction f est continue sur l'intervalle $[-4 ; 3]$.
On calcule : $f(-4) = -3$
$f(3) = 67$ ← 5 est bien compris entre -3 et 67 !

→ le nombre 5 appartient bien à l'intervalle image $[-3 ; 67]$.

* Donc, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, on sait que l'équation $f(x) = 5$ possède au moins une solution dans l'intervalle $[-4 ; 3]$

***Remarque** : Pour ce théorème, inutile d'avoir les variations de la fonction. Cela dit, on sait juste qu'il y a **"au moins"** une solution. Pour avoir le nombre exact de solutions, il faudra connaitre les variations de la fonction et utiliser le **corollaire** de ce théorème ! Et c'est disponible sur les fiches suivantes !!*