Raisonnement par récurrence
Encadrement d'une suite définie à l'aide d'une fonction

On va utiliser ce raisonnement par récurrence lorsque l'on a une relation du type $U_{n+1} = f\ (\ U_n\ )$.
La seule contrainte sera ici de travailler avec ***une fonction f croissante*** sur un intervalle donné **.**
En effet, c'est la condition qui permettra de ***conserver l'ordre des inégalités*** et de ***respecter l'hérédité*** .

L'énoncé

On considère une suite définie par la relation $U_{n+1} = \dfrac{3\,\text{Un}+2}{\text{Un}+1}$ avec $U_0 = 1$.

On veut montrer que, pour tout *n* , on a l'encadrement : $1 \leqslant U_n \leqslant 3$.

La méthode

Préambule

La méthode de base consistant à travailler sur les inégalités, en partant de l'encadrement de U_n , serait ici très piègeuse !! Il faudrait une dextérité sur les inégalités que peu d'élèves possèdent.

→ le plus simple est d'utiliser la fonction définie par $U_{n+1} = f\ (\ U_n\ )$. On aura $f(x) = \dfrac{3\ x+2}{x+1}$.

Mais il faut montrer que f est croissante (sur $[0\ ;+\infty[$ car les termes U_n sont clairement positifs).

On a $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+1}$ soit $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ avec $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

→ f' est positive sur $[0\,;+\infty[$ → f est croissante sur $[0\,;+\infty[$

Initialisation

On sait que $U_0 = 1$

Donc on a bien $1 \leq U_0 \leq 3$

L'encadrement est bien vérifié au rang 0.

Hérédité *(qui sera très rapide pour le coup car il suffit d'appliquer la fonction f)*

on suppose donc $1 \leq U_n \leq 3$

La fonction f est CROISSANTE donc elle conserve l'ordre !

on obtient $f(1) \leq f(U_n) \leq f(3)$

et donc $(1 \leq)\ \dfrac{5}{2} \leq U_{n+1} \leq \dfrac{11}{4}\ (\leq 3)$

évident évident

On a bien $1 \leq U_{n+1} \leq 3$

c'est bon !!

Conclusion

Si l'encadrement est vérifié au rang *n*

Alors cet encadrement reste vérifié au rang *n + 1*.

Or cet encadrement est vérifié au rang 0.

Donc, d'après le principe de récurrence, l'encadrement sera vérifié pour tout entier *n*.