Raisonnement par récurrence
Encadrement et monotonie en un seul coup (2)

Certains exercices nous proposent de faire un raisonnement par récurrence qui permettra d'un seul coup de prouver la monotonie d'une suite **et** de trouver un encadrement de cette suite.
Si c'est bien maitrisé, cela fait gagner un peu de temps car on fait un seul raisonnement plutôt que deux.

L'énoncé

On considère une suite définie par la relation $U_{n+1} = 0{,}75\, U_n\ (1 - 0{,}15\, U_n)$ avec $U_0 = 0{,}6$.
On veut montrer que ,pour tout n , on a $0 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n \leqslant 1$.

Cela prouvera en même temps que la suite est décroissante (car on a $U_{n+1} \leqslant U_n$) et que la suite est bornée (car elle est encadrée par 0 et par 1).

La méthode

Préambule
La relation de récurrence entre U_{n+1} et U_n va poser problème à cause du terme U_n qui se retrouve deux fois dans l'écriture. Je rappelle que cela signifierait que tout raisonnement direct par récurrence serait difficile et qu'il faudrait une dextérité sur les inégalités que peu d'élèves possèdent.
→ le plus simple est d'utiliser la fonction définie par $U_{n+1} = f\ (U_n)$.
On aura $f(x) = 0{,}75\, x\ (1 - 0{,}15\, x)$. Et il faut juste montrer que f est croissante sur [0 ; 1].

On a $f(x) = 0{,}75x(1-0{,}15x) \rightarrow f'(x) = -0{,}225x + 0{,}75$
Si $x \in [0;1]$, il est évident que $f'(x) > 0$
Et la fonction f est donc bien croissante sur $[0;1]$.

Initialisation
On a $U_0 = 0{,}6$
On calcule $U_1 = 0{,}75 U_0 (1 - 0{,}15 U_0)$
$= 0{,}75 \times 0{,}6 \times (1 - 0{,}15 \times 0{,}6)$
$= 0{,}4095$
Donc on a bien $0 \leq U_1 \leq U_0 \leq 1$

Hérédité *(qui sera très rapide pour le coup car il suffit d'appliquer la fonction f)*
On suppose donc $0 \leq U_{n+1} \leq U_n \leq 1$
On obtient $f(0) \leq f(U_{n+1}) \leq f(U_n) \leq f(1)$
On a bien $0 \leq U_{n+2} \leq U_{n+1} \leq 0{,}6375\ (\leq 1)$

La fonction f est CROISSANTE donc elle conserve l'ordre !

↳ c'est bon !!

Conclusion
Si la propriété est vérifiée au rang *n*
Alors cette propriété reste vérifiée au rang *n + 1*.
Or cette propriété est vérifiée au rang 0.
Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété sera vérifiée pour tout entier *n*.