Raisonnement par récurrence
Encadrement et monotonie en un seul coup (1)

Certains exercices nous proposent de faire un raisonnement par récurrence qui permettra d'un seul coup de prouver la monotonie d'une suite **et** de trouver un encadrement de cette suite.
Si c'est bien maitrisé, cela fait gagner un peu de temps car on fait un seul raisonnement plutôt que deux.

L'énoncé

On considère une suite définie par la relation $U_{n+1} = 0,94\, U_n + 1,5$ avec $U_0 = 1$.
On veut montrer que ,pour tout n , on a $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 25$.

Cela prouvera en même temps que la suite est croissante (car on a $U_n \leqslant U_{n+1}$) et que la suite est bornée (car elle est encadrée par 0 et par 25).

La méthode

Initialisation

On a $U_0 = 1$

On calcule $U_1 = 0,94\, U_0 + 1,5$
$= 0,94 \times 1 + 1,5 = 2,44$

Donc on a bien $0 \leq U_0 \leq U_1 \leq 25$

Hérédité

La relation de récurrence entre U_{n+1} et U_n est suffisamment simple pour que l'on puisse partir directement de $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 25$ et que l'on passe au rang d'après en multipliant par 0,94 puis en ajoutant 1,5.

On suppose donc $0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 25$

soit $0 \leq 0,94\, U_n \leq 0,94\, U_{n+1} \leq 23,5$ en multipliant par 0,94.

soit $1,5 \leq 0,94\, U_n + 1,5 \leq 0,94\, U_{n+1} + 1,5 \leq 25$ en ajoutant 1,5.

On a bien $1,5 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 25$

$\hookrightarrow$ c'est bon !!

Conclusion

Si la propriété est vérifiée au rang n
Alors cette propriété reste vérifiée au rang $n + 1$.
Or cette propriété est vérifiée au rang 0.
Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété sera vérifiée pour tout entier n.