Raisonnement par récurrence
Pour obtenir la formule explicite d'une suite (3)

Pour ce type de récurrence, l'idée de base sera, dans l'hérédité, de ***partir de la formule de récurrence existante entre U_{n+1} et U_n*** (cette formule est souvent donnée mais, parfois, c'est à vous de l'obtenir).
On remplace alors U_n par l'expression supposée (qui dépend de n) et on montre que cette expression reste vraie pour U_{n+1} .

L'énoncé

On considère une suite définie par la relation $U_n = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n$

On veut montrer la formule suivante : **pour tout $n \geqslant 1$, montrons que** $U_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

La méthode

Initialisation

On sait que $U_1 = \boxed{1}$ (on aurait $U_2 = 1+2 = 3$)

On remplace alors n par 1 dans la formule de U_n

$\rightarrow$ on obtient $U_1 = \dfrac{1\times(1+1)}{2} = \boxed{1}$

La formule est donc bien vérifiée au rang 1 .

Hérédité

On rappelle ici que, pour les calculs, il faudra automatiquement partir de la formule de récurrence entre U_n et U_{n+1} . C'est à dire que l'on commencera par écrire l'égalité donnant U_{n+1} en fonction de U_n .

Mais, avec cet énoncé, c'est à vous de trouver ce lien !

On écrit alors $U_{n+1} = \underbrace{1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n}_{U_n} + (n+1) = U_n + (n+1)$ ***soit*** $U_{n+1} = U_n + (n+1)$

On suppose la formule vraie pour n, soit $U_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Montrons qu'elle reste vraie pour $(n+1)$, soit $U_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

On part de : $U_{n+1} = U_n + (n+1)$

bien respecter ce point de départ

soit $U_{n+1} = \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1)$ on a remplacé U_n par sa formule

soit $U_{n+1} = (n+1)\left(\dfrac{n}{2} + 1\right) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

on a factorisé par $(n+1)$ $\quad$ ↳ c'est bon !!

Conclusion

Si la formule est vérifiée au rang n
Alors cette formule reste vérifiée au rang $n + 1$.
Or cette formule est vérifiée au rang 1.
Donc, d'après le principe de récurrence, la formule sera vérifiée pour tout entier $n \geqslant 1$.