## Raisonnement par récurrence
## Pour obtenir la formule explicite d'une suite (2)

Pour ce type de récurrence, l'idée de base sera, dans l'hérédité, de ***partir de la formule de récurrence existante entre $U_{n+1}$ et $U_n$*** (cette formule est souvent donnée mais, parfois, c'est à vous de l'obtenir).
On remplace alors $U_n$ par l'expression supposée (qui dépend de $n$) et on montre que cette expression reste vraie pour $U_{n+1}$ .

### L'énoncé

On considère une suite définie par la relation $U_{n+1} = \dfrac{Un}{Un+1}$ avec $U_0 = 1$

On veut montrer la formule suivante : **pour tout $n$ , montrons que $U_n = \dfrac{1}{n+1}$**

### La méthode

***Initialisation***

On sait que $U_0 = \boxed{1}$

on remplace alors $n$ par 0 dans la formule de $U_n$

$\rightarrow$ on obtient $U_0 = \dfrac{1}{0+1} = \boxed{1}$

La formule est donc bien vérifiée au rang 0.

***Hérédité***

*On rappelle ici que, pour les calculs, il faudra automatiquement partir de la formule de récurrence entre $U_n$ et $U_{n+1}$ . C'est à dire que l'on commencera par écrire l'égalité donnant $U_{n+1}$ en fonction de $U_n$ .*

On suppose la formule vraie pour $n$, soit $U_n = \dfrac{1}{n+1}$

Montrons qu'elle reste vraie pour $(n+1)$, soit $U_{n+1} = \dfrac{1}{n+2}$

$(n+1)+1$

On part de : $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{U_n + 1}$

bien respecter ce point de départ

soit $U_{n+1} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}+1} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1+n+1}{n+1}} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+2}{n+1}} = \dfrac{1}{n+2}$

on remplace $U_n$ par sa formule

$\hookrightarrow$ c'est bon !

$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \dfrac{a}{\cancel{b}} \times \dfrac{\cancel{b}}{c} = \dfrac{a}{c}$ !

***Conclusion***

***Si*** la formule est vérifiée au rang $n$
***Alors*** cette formule reste vérifiée au rang $n + 1$.
***Or*** cette formule est vérifiée au rang 0.
**Donc**, d'après le principe de récurrence, la formule sera vérifiée pour tout entier $n$.