Raisonnement par récurrence
Pour obtenir la formule explicite d'une suite (1)

Pour ce type de récurrence, l'idée de base sera, dans l'hérédité, de ***partir de la formule de récurrence existante entre U_{n+1} et U_n*** (cette formule est souvent donnée mais, parfois, c'est à vous de l'obtenir).
On remplace alors U_n par l'expression supposée (qui dépend de n) et on montre que cette expression reste vérifiée pour U_{n+1} .

L'énoncé

On considère une suite définie par la relation $U_{n+1} = 2\,U_n + 5$ avec $U_0 = 7$
On veut montrer la formule suivante : **pour tout n , montrons que $U_n = 12 \times 2^n - 5$**

La méthode

Initialisation

On sait que $U_0 = \boxed{7}$

On remplace alors n par 0 dans la formule de U_n

→ on obtient $U_0 = 12 \times 2^0 - 5 = 12 \times 1 - 5 = \boxed{7}$

La formule est donc bien vérifiée au rang 0.

Hérédité

On rappelle ici que, pour les calculs, il faudra automatiquement partir de la formule de récurrence entre U_n et U_{n+1} . C'est à dire que l'on commencera par écrire l'égalité donnant U_{n+1} en fonction de U_n .

On suppose la formule vraie pour n, soit $U_n = 12 \times 2^n - 5$

Montrons qu'elle reste vraie pour $(n+1)$, soit $U_{n+1} = 12 \times 2^{n+1} - 5$

On part de : $U_{n+1} = 2U_n + 5$

bien respecter ce point de départ

on a remplacé U_n par sa formule

soit $U_{n+1} = 2(12 \times 2^n - 5) + 5$

soit $U_{n+1} = 2 \times 12 \times 2^n - 10 + 5$

$U_{n+1} = 12 \times 2 \times 2^n - 5$

⚠ ne pas calculer $2 \times 12 = 24$ et faire apparaître $2 \times 2^n = 2^{n+1}$

$U_{n+1} = 12 \times 2^{n+1} - 5$

↳ c'est bon !!

Conclusion

Si la formule est vérifiée au rang n
Alors cette formule reste vérifiée au rang $n + 1$.
Or cette formule est vérifiée au rang 0.
Donc, d'après le principe de récurrence, la formule sera vérifiée pour tout entier n.