Raisonnement par récurrence
Monotonie d'une suite définie à l'aide d'une fonction (2)

On va utiliser ce raisonnement par récurrence lorsque l'on a une relation du type $U_{n+1} = f(U_n)$.
La seule contrainte sera ici de travailler avec ***une fonction f croissante*** sur un intervalle donné **.**
En effet, c'est la condition qui permettra de ***conserver l'ordre des inégalités*** et de ***respecter l'hérédité*** .

L'énoncé

On considère une suite définie par la relation $U_{n+1} = 0{,}95\, U_n + 200$ avec $U_0 = 10\,000$.
On veut montrer que la suite (U_n) est décroissante, c'est à dire que $U_{n+1} < U_n$.

La méthode

Préambule
La méthode de base consistant à déterminer le signe de $U_{n+1} - U_n$ fonctionnerait mais cela demanderait d'encadrer la suite (U_n) afin de pouvoir conclure sur le signe du résultat.
→ le plus simple est d'utiliser la fonction définie par $U_{n+1} = f(U_n)$. On aura $f(x) = 0{,}95\,x + 200$.
Mais il faut juste montrer que f est croissante .

On a $f(x) = 0{,}95x + 200$ soit $f'(x) = 0{,}95$

→ f' est positive sur $\mathbb{R}$ → f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Initialisation

on sait que $U_0 = 10\,000$
on calcule $U_1 = 0{,}95U_0 + 200 = 0{,}95 \times 10\,000 + 200$
on obtient $U_1 = 9700$ et on a bien $U_1 < U_0$.

Hérédité *(qui sera très rapide pour le coup car il suffit d'appliquer la fonction f)*
On va ici obtenir un résultat qui surprend la première fois qu'on le voit.
En effet, on va travailler avec une fonction <u>croissante</u> qui va nous permettre de montrer que la suite est, quant à elle, <u>décroissante</u>.

on suppose donc $U_{n+1} < U_n$

on obtient $f(U_{n+1}) < f(U_n)$

soit $U_{n+2} < U_{n+1}$

La fonction f est CROISSANTE donc elle conserve l'ordre !

↳ c'est bon !!
et (U_n) est bien décroissante !

Conclusion
Si la propriété est vérifiée au rang *n*
Alors cette propriété reste vérifiée au rang *n + 1*.
Or cette propriété est vérifiée au rang 0.
Donc, d'après le principe de récurrence, la suite est bien décroissante pour tout entier *n*.