Raisonnement par récurrence
Monotonie d'une suite définie à l'aide d'une fonction

On va utiliser ce raisonnement par récurrence lorsque l'on a une relation du type $U_{n+1} = f\ (\ U_n\ )$.
La seule contrainte sera ici de travailler avec ***une fonction f croissante*** sur un intervalle donné .
En effet, c'est la condition qui permettra de ***conserver l'ordre des inégalités*** et de ***respecter l'hérédité*** .

L'énoncé

On considère une suite définie par la relation $U_{n+1} = \dfrac{3\ \mathrm{Un} + 2}{\mathrm{Un} + 1}$ avec $U_0 = 1$.

On veut montrer que la suite (U_n) est croissante, c'est à dire que $U_{n+1} > U_n$.

La méthode

Préambule

La méthode de base consistant à déterminer le signe de $U_{n+1} - U_n$ serait fastidieuse (on arriverait sur un trinôme du second degré et il faudait alors situer les valeurs de U_n à l'aide d'un encadrement).
De même, tout raisonnement direct par récurrence serait rendu difficile à cause du terme U_n qui se retrouve deux fois dans l'écriture. Il faudrait une dextérité sur les inégalités que peu d'élèves possèdent.

→ le plus simple est d'utiliser la fonction définie par $U_{n+1} = f\ (\ U_n\ )$. On aura $f(x) = \dfrac{3\ x + 2}{x + 1}$.

Mais il faut montrer que f est croissante (sur $[0\ ;\ +\infty[$ car les termes U_n sont clairement positifs).

On a $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+1}$ soit $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ (avec $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$)

↳ f' est positive sur $[0\ ;+\infty[$ → f est croissante sur $[0\ ;+\infty[$.

Initialisation

On sait que $U_0 = 1$

On calcule $U_1 = \dfrac{3U_0 + 2}{U_0 + 1} = \dfrac{3 \times 1 + 2}{1 + 1} = \dfrac{5}{2}$

On a donc $U_1 > U_0$.

Hérédité *(qui sera très rapide pour le coup car il suffit d'appliquer la fonction f)*

On suppose donc $U_{n+1} > U_n$

On obtient $f(U_{n+1}) > f(U_n)$ La fonction est CROISSANTE donc elle CONSERVE l'ordre !

soit $U_{n+2} > U_{n+1}$

↳ c'est bon !!

Conclusion et (U_n) est bien croissante !!

Si la propriété est vérifiée au rang n
Alors cette propriété reste vérifiée au rang $n + 1$.
Or cette propriété est vérifiée au rang 0.
Donc, d'après le principe de récurrence, la suite est bien croissante pour tout entier n.