Raisonnement par récurrence
Pour encadrer une suite (3)

Pour ce type de récurrence, l'idée de base sera, dans l'hérédité, de ***partir de l'encadrement de U_n***.
Puis, en travaillant sur les inégalités, on passe de U_n à U_{n+1}, et on obtient le même encadrement pour U_{n+1}.

L'énoncé

On considère une suite définie par la relation $U_{n+1} = \dfrac{1}{2\,\mathrm{Un}+1}$ avec $U_0 = \dfrac{1}{3}$.
On veut montrer l'encadrement suivant : **pour tout n, montrons que $0 \leqslant U_n \leqslant 1$**

La méthode

Initialisation

On sait que $U_0 = \dfrac{1}{3}$

Donc on a bien $0 \leq U_0 \leq 1$

L'inégalité $0 \leq U_n \leq 1$ est bien vérifiée au rang 0.

Hérédité

On rappelle ici que, pour les calculs, il faudra automatiquement partir de l'encadrement initial de U_n.
C'est à dire que l'on commencera par écrire : $0 \leqslant U_n \leqslant 1$

On suppose que l'encadrement est vrai au rang n,
soit $0 \leq U_n \leq 1$.

Montrons que cela reste vrai au rang $(n+1)$,
soit $0 \leq U_{n+1} \leq 1$.

On part de : $0 \leq U_n \leq 1$

bien respecter ce point de départ

soit $0 \leq 2U_n \leq 2$ (en multipliant par 2)

soit $1 \leq 2U_n + 1 \leq 3$ (en ajoutant 1)

soit $\dfrac{1}{1} \geq \dfrac{1}{2U_n+1} \geq \dfrac{1}{3}$ (on inverse les inégalités)

c'est à dire $(0 \leq)\, \dfrac{1}{3} \leq U_{n+1} \leq 1$

c'est évident !

↳ c'est bon !!

Conclusion

Si l'encadrement est vérifié au rang n
Alors cet encadrement reste vérifié au rang $n + 1$.
Or cet encadrement est vérifié au rang 0.
Donc, d'après le principe de récurrence, l' encadrement sera vérifié pour tout entier n.