Raisonnement par récurrence
Pour encadrer une suite (2)

Pour ce type de récurrence, l'idée de base sera, dans l'hérédité, de ***partir de l'encadrement de*** U_n .
Puis, en travaillant sur les inégalités, on passe de U_n à U_{n+1} et on obtient le même encadrement pour U_{n+1} .

L'énoncé

On considère une suite définie par la relation $U_{n+1} = \sqrt{2Un+3}$ avec $U_0 = 4$.
On veut montrer l'encadrement suivant : **pour tout *n* , montrons que $3 \leqslant U_n \leqslant 4$**

La méthode

Initialisation

On sait que $U_0 = 4$

Donc on a bien $3 \leq U_0 \leq 4$

L'encadrement $3 \leq U_n \leq 4$ est bien vérifié au rang 0 .

Hérédité

On rappelle ici que, pour les calculs, il faudra automatiquement partir de l'encadrement initial de U_n .
C'est à dire que l'on commencera par écrire : $3 \leqslant U_n \leqslant 4$

On suppose que l'encadrement est vrai au rang n ,
soit $3 \leq U_n \leq 4$

Montrons que cela reste vrai au rang $(n+1)$,
soit $3 \leq U_{n+1} \leq 4$

On part de : $3 \leq U_n \leq 4$

bien respecter ce point de départ !

soit $6 \leq 2U_n \leq 8$ (en multipliant par 2)

soit $9 \leq 2U_n + 3 \leq 11$ (en ajoutant 3)

soit $\sqrt{9} \leq \sqrt{2U_n+3} \leq \sqrt{11}$ (≤ 4) à vérifier !

soit $3 \leq U_{n+1} \leq 4$

$\hookrightarrow$ c'est bon !!

Conclusion
Si l'encadrement est vérifié au rang *n*
Alors cet encadrement reste vérifié au rang *n + 1*.
Or cet encadrement est vrai au rang 0.
Donc, d'après le principe de récurrence, l'encadrement sera vérifié pour tout entier *n*.