Comment montrer l'unicité d'une solution
Le corollaire du T V I : un exercice type

Nous allons travailler ici avec une fonction assez simple (c'est un polynôme) mais le travail et la méthode seraient identiques si on travaillait avec des fonctions utilisant l'*exponentielle* ou le *logarithme neperien.*

L'énoncé

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$
Montrer que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution sur $[-10 ; 10]$.

La solution

→ *étape n°1 : on dérive la fonction f pour obtenir les signes de f' et donc les variations de f.*

On a $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$
soit $f'(x) = 3x^2 - 6x$
La dérivée f' a deux racines (0 et 2) que l'on trouve avec le discriminant Δ ou en factorisant $f'(x) = x(3x - 6)$

On obtient le tableau suivant, après avoir calculé les différentes images $f(-10)$, $f(0)$, $f(2)$ et $f(10)$:

x	-10	0	2	10
Signes de $f'(x)$				
Variations de $f(x)$	-1299 ↗	1 ↘	-3 ↗	701

→ *étape n°2 : on élimine ici les intervalles dans lesquels il ne peut pas y avoir de solution puis on applique le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires dans l'intervalle où se trouvera la solution.*

* sur $[-10 ; 2]$, le maximum de la fonction est égal à 1
→ l'équation $f(x) = 4$ n'a donc pas de solution sur $[-10 ; 2]$.

* sur $[2 ; 10]$, on applique le COROLLAIRE du TVI
→ la fonction est continue et strictement croissante sur $[2 ; 10]$.

On a : $f(2) = -3$
$f(10) = 701$

4 est bien compris entre -3 et 701 !

et le nombre 4 appartient bien à l'intervalle image $[-3 ; 701]$.
et, d'après le COROLLAIRE du TVI,
l'équation $f(x) = 4$ possède une unique solution sur $[2 ; 10]$.