Comment faire un raisonnement par récurrence
Le principe

On va très souvent utiliser le *raisonnement par récurrence* en Terminale S.
Les étapes de ce raisonnement sont toujours les mêmes et elles sont à bien respecter :

- *Initialisation* : on doit vérifier que ce que l'on veut montrer (encadrement, formule ...) est *vérifié pour un certain rang*. C'est à dire que l'on fera la *vérification* pour le rang 0 ou le rang 1 ou .....
C'est comme si l'on vérifiait la *source d'une information*.
Attention, le rang de cette initialisation nous permettra ensuite d'affirmer que la propriété est vérifiée *à partir de ce rang*.

- ***Hérédité*** : c'est la particularité du raisonnement par récurrence.
On va *supposer* que ce que l'on veut montrer est vraie pour le rang n , et en utilisant cette suppositon on doit montrer que cela reste vraie pour le rang suivant $n + 1$.
C'est comme si l'on vérifiait la *bonne transmission d'une information*.

- *Conclusion* : elle nous permet de résumer la démarche et le résultat obtenu.

Les trois grands types de raisonnement par récurrence (à voir sur les fiches suivantes)

Le **premier type** correspond au fait d'obtenir un ***encadrement*** pour une suite (ou parfois juste une ***minoration*** ou une ***majoration***).
Les questions posés seront du type :

- pour tout n , montrons que $3 \leqslant U_n \leqslant 4$ (c'est un *encadrement*).
- pour tout n , montrons que $U_n \leqslant 10$ (c'est une *majoration*)
- pour tout n , montrons que $U_n \geqslant 2$ (c'est une *minoration*)

Dans l'hérédité, il faudra prendre l'habitude de t***oujours partir des inégalités avec*** U_n afin de construire petit à petit les inégalités pour U_{n+1} .

Le **deuxième type** correspond au fait d'obtenir une ***formule explicite*** (en fonction de n).
Les questions posés seront du type :

- pour tout n , montrons que $U_n = 12 \times 2^n - 5$

Dans l'hérédité, il faudra prendre l'habitude de ***toujours partir du lien existant entre*** U_{n+1} ***et*** U_n .

Le **troisième type** correspond au fait d'utiliser une fonction f définie par la relation $U_{n+1} = f(U_n)$.
On rencontrera très souvent ce type de récurrence lorsque, dans la définition de la suite, on se retrouve avec U_n au numérateur et au dénominateur d'une fraction.
Les questions posés seront du type :

- montrer que la suite (U_n) est croissante , c'est à dire que $U_n \leqslant U_{n+1}$.
- montrer que la suite (U_n) est décroissante , c'est à dire que $U_n \geqslant U_{n+1}$.
- prouver un encadrement (ou une majoration ou un minoration).

Dans l'hérédité, il faudra juste vérifier que la fonction f est bien croissante afin de conserver le sens des inégalités.

Raisonnement par récurrence
Pour encadrer (ou minorer) une suite (1)

Pour ce type de récurrence, l'idée de base sera, dans l'hérédité, de partir de ***la minoration de*** $\boldsymbol{U_n}$.
Puis, en travaillant sur les inégalités, on passe de U_n à U_{n+1} , et on obtient la même minoration pour U_{n+1} .

L'énoncé

On considère une suite définie par la relation $U_{n+1} = 0{,}95\, U_n + 200$ avec $U_0 = 10\,000$.
On veut montrer la minoration suivante : **pour tout *n* , montrons que** $\boldsymbol{U_n \geqslant 4\,000}$

La méthode

Initialisation

On sait que $U_0 = 10\,000$
Donc on a bien $U_0 \geq 4\,000$
L'inégalité $U_n \geq 4\,000$ est bien vérifiée au rang 0.

Hérédité
On rappelle ici que, pour les calculs, il faudra automatiquement partir de la minoration initiale de U_n .
C'est à dire que l'on commencera par écrire : $U_n \geqslant 4\,000$

On suppose que la minoration est vraie au rang n,
soit $U_n \geq 4\,000$
Montrons que cela reste vrai au rang (n+1),
soit $U_{n+1} \geq 4\,000$

On part de : $U_n \geq 4\,000$

bien respecter ce point de départ !

soit $0{,}95\, U_n \geq 0{,}95 \times 4000$ soit 3800

soit $0{,}95\, U_n + 200 \geq 3800 + 200$

soit $U_{n+1} \geq 4000$

↳ c'est bon !!

Conclusion
Si la minoration est vérifié au rang *n*
Alors cette minoration reste vérifiée au rang *n + 1*.
Or cette minoration est vraie au rang 0.
Donc, d'après le principe de récurrence, la minoration sera vérifiée pour tout entier *n*.

Raisonnement par récurrence
Pour encadrer une suite (2)

Pour ce type de récurrence, l'idée de base sera, dans l'hérédité, de ***partir de l'encadrement de U_n***.
Puis, en travaillant sur les inégalités, on passe de U_n à U_{n+1} et on obtient le même encadrement pour U_{n+1}.

L'énoncé

On considère une suite définie par la relation $U_{n+1} = \sqrt{2Un + 3}$ avec $U_0 = 4$.
On veut montrer l'encadrement suivant : **pour tout n, montrons que $3 \leqslant U_n \leqslant 4$**

La méthode

Initialisation

On sait que $U_0 = 4$
Donc on a bien $3 \leq U_0 \leq 4$
L'encadrement $3 \leq U_n \leq 4$ est bien vérifié au rang 0.

Hérédité

On rappelle ici que, pour les calculs, il faudra automatiquement partir de l'encadrement initial de U_n.
C'est à dire que l'on commencera par écrire : $3 \leqslant U_n \leqslant 4$

On suppose que l'encadrement est vrai au rang n,
soit $3 \leq U_n \leq 4$
Montrons que cela reste vrai au rang $(n+1)$,
soit $3 \leq U_{n+1} \leq 4$

On part de : $3 \leq U_n \leq 4$

bien respecter ce point de départ!

soit $6 \leq 2U_n \leq 8$ (en multipliant par 2)
soit $9 \leq 2U_n + 3 \leq 11$ (en ajoutant 3)
soit $\sqrt{9} \leq \sqrt{2U_n + 3} \leq \sqrt{11}$ (≤ 4) à vérifier !
soit $3 \leq U_{n+1} \leq 4$

$\hookrightarrow$ c'est bon !!

Conclusion

Si l'encadrement est vérifié au rang n
Alors cet encadrement reste vérifié au rang $n + 1$.
Or cet encadrement est vrai au rang 0.
Donc, d'après le principe de récurrence, l'encadrement sera vérifié pour tout entier n.

Raisonnement par récurrence
Pour encadrer une suite (3)

Pour ce type de récurrence, l'idée de base sera, dans l'hérédité, de ***partir de l'encadrement de U_n***.
Puis, en travaillant sur les inégalités, on passe de U_n à U_{n+1}, et on obtient le même encadrement pour U_{n+1}.

L'énoncé

On considère une suite définie par la relation $U_{n+1} = \dfrac{1}{2U_n+1}$ avec $U_0 = \dfrac{1}{3}$.
On veut montrer l'encadrement suivant : **pour tout n, montrons que $0 \leqslant U_n \leqslant 1$**

La méthode

Initialisation

On sait que $U_0 = \dfrac{1}{3}$

Donc on a bien $0 \leq U_0 \leq 1$

L'inégalité $0 \leq U_n \leq 1$ est bien vérifiée au rang 0.

Hérédité

On rappelle ici que, pour les calculs, il faudra automatiquement partir de l'encadrement initial de U_n.
C'est à dire que l'on commencera par écrire : $0 \leqslant U_n \leqslant 1$

On suppose que l'encadrement est vrai au rang n,
soit $0 \leq U_n \leq 1$.

Montrons que cela reste vrai au rang $(n+1)$,
soit $0 \leq U_{n+1} \leq 1$.

On part de : $0 \leq U_n \leq 1$

bien respecter ce point de départ

soit $0 \leq 2U_n \leq 2$ (en multipliant par 2)

soit $1 \leq 2U_n+1 \leq 3$ (en ajoutant 1)

soit $\dfrac{1}{1} \geq \dfrac{1}{2U_n+1} \geq \dfrac{1}{3}$ (on inverse les inégalités)

c'est à dire $(0 \leq) \dfrac{1}{3} \leq U_{n+1} \leq 1$

c'est évident !

$\hookrightarrow$ c'est bon !!

Conclusion

Si l'encadrement est vérifié au rang n
Alors cet encadrement reste vérifié au rang $n + 1$.
Or cet encadrement est vérifié au rang 0.
Donc, d'après le principe de récurrence, l' encadrement sera vérifié pour tout entier n.

Raisonnement par récurrence
Pour obtenir la formule explicite d'une suite (1)

Pour ce type de récurrence, l'idée de base sera, dans l'hérédité, de ***partir de la formule de récurrence existante entre U_{n+1} et U_n*** (cette formule est souvent donnée mais, parfois, c'est à vous de l'obtenir).
On remplace alors U_n par l'expression supposée (qui dépend de n) et on montre que cette expression reste vérifiée pour U_{n+1} .

L'énoncé

On considère une suite définie par la relation $U_{n+1} = 2\,U_n + 5$ avec $U_0 = 7$
On veut montrer la formule suivante : **pour tout n , montrons que $U_n = 12 \times 2^n - 5$**

La méthode

Initialisation

On sait que $U_0 = \boxed{7}$

On remplace alors n par 0 dans la formule de U_n

$\rightarrow$ on obtient $U_0 = 12 \times 2^0 - 5 = 12 \times 1 - 5 = \boxed{7}$

La formule est donc bien vérifiée au rang 0.

Hérédité
On rappelle ici que, pour les calculs, il faudra automatiquement partir de la formule de récurrence entre U_n et U_{n+1} . C'est à dire que l'on commencera par écrire l'égalité donnant U_{n+1} en fonction de U_n .

On suppose la formule vraie pour n, soit $U_n = 12 \times 2^n - 5$

Montrons qu'elle reste vraie pour $(n+1)$, soit $U_{n+1} = 12 \times 2^{n+1} - 5$

On part de : $U_{n+1} = 2U_n + 5$

bien respecter ce point de départ

on a remplacé U_n par sa formule

soit $U_{n+1} = 2(12 \times 2^n - 5) + 5$

soit $U_{n+1} = 2 \times 12 \times 2^n - 10 + 5$

$U_{n+1} = 12 \times 2 \times 2^n - 5$

⚠ ne pas calculer $2 \times 12 = 24$ et faire apparaître $2 \times 2^n = 2^{n+1}$

$U_{n+1} = 12 \times 2^{n+1} - 5$

$\hookrightarrow$ c'est bon !!

Conclusion
Si la formule est vérifiée au rang n
Alors cette formule reste vérifiée au rang $n + 1$.
Or cette formule est vérifiée au rang 0.
Donc, d'après le principe de récurrence, la formule sera vérifiée pour tout entier n.

Raisonnement par récurrence
Pour obtenir la formule explicite d'une suite (2)

Pour ce type de récurrence, l'idée de base sera, dans l'hérédité, de ***partir de la formule de récurrence existante entre U_{n+1} et U_n*** (cette formule est souvent donnée mais, parfois, c'est à vous de l'obtenir).
On remplace alors U_n par l'expression supposée (qui dépend de n) et on montre que cette expression reste vraie pour U_{n+1} .

L'énoncé

On considère une suite définie par la relation $U_{n+1} = \dfrac{\text{Un}}{\text{Un} + 1}$ avec $U_0 = 1$

On veut montrer la formule suivante : **pour tout n , montrons que $U_n = \dfrac{1}{n+1}$**

La méthode

Initialisation

On sait que $U_0 = \boxed{1}$

on remplace alors n par 0 dans la formule de U_n

$\rightarrow$ on obtient $U_0 = \dfrac{1}{0+1} = \boxed{1}$

La formule est donc bien vérifiée au rang 0.

Hérédité

On rappelle ici que, pour les calculs, il faudra automatiquement partir de la formule de récurrence entre U_n et U_{n+1} . C'est à dire que l'on commencera par écrire l'égalité donnant U_{n+1} en fonction de U_n .

On suppose la formule vraie pour n, soit $U_n = \dfrac{1}{n+1}$

Montrons qu'elle reste vraie pour $(n+1)$, soit $U_{n+1} = \dfrac{1}{n+2}$

$(n+1)+1$

On part de : $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{U_n + 1}$

bien respecter ce point de départ

soit $U_{n+1} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}+1} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1+n+1}{n+1}} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+2}{n+1}} = \dfrac{1}{n+2}$

on remplace Un par sa formule

$\hookrightarrow$ c'est bon !

$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \dfrac{a}{\cancel{b}} \times \dfrac{\cancel{b}}{c} = \dfrac{a}{c}$!

Conclusion
Si la formule est vérifiée au rang n
Alors cette formule reste vérifiée au rang $n + 1$.
Or cette formule est vérifiée au rang 0.
Donc, d'après le principe de récurrence, la formule sera vérifiée pour tout entier n.

Raisonnement par récurrence
Pour obtenir la formule explicite d'une suite (3)

Pour ce type de récurrence, l'idée de base sera, dans l'hérédité, de ***partir de la formule de récurrence existante entre U_{n+1} et U_n*** (cette formule est souvent donnée mais, parfois, c'est à vous de l'obtenir).
On remplace alors U_n par l'expression supposée (qui dépend de n) et on montre que cette expression reste vraie pour U_{n+1} .

L'énoncé

On considère une suite définie par la relation $U_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$

On veut montrer la formule suivante : **pour tout $n \geqslant 1$, montrons que $U_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$**

La méthode

Initialisation

On sait que $U_1 = \boxed{1}$ (on aurait $U_2 = 1+2 = 3$)

On remplace alors n par 1 dans la formule de U_n

→ on obtient $U_1 = \dfrac{1 \times (1+1)}{2} = \boxed{1}$

La formule est donc bien vérifiée au rang 1.

Hérédité

On rappelle ici que, pour les calculs, il faudra automatiquement partir de la formule de récurrence entre U_n et U_{n+1} . C'est à dire que l'on commencera par écrire l'égalité donnant U_{n+1} en fonction de U_n .

Mais, avec cet énoncé, c'est à vous de trouver ce lien !

On écrit alors $U_{n+1} = \underbrace{1 + 2 + 3 + ...}_{U_n} + n + (n+1) = U_n + (n+1)$ ***soit*** $U_{n+1} = U_n + (n+1)$

On suppose la formule vraie pour n, soit $U_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Montrons qu'elle reste vraie pour $(n+1)$, soit $U_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

On part de : $U_{n+1} = U_n + (n+1)$

bien respecter ce point de départ

soit $U_{n+1} = \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1)$ — on a remplacé U_n par sa formule

soit $U_{n+1} = (n+1)\left(\dfrac{n}{2} + 1\right) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

on a factorisé par $(n+1)$

↳ c'est bon !!

Conclusion

Si la formule est vérifiée au rang n

Alors cette formule reste vérifiée au rang $n + 1$.

Or cette formule est vérifiée au rang 1.

Donc, d'après le principe de récurrence, la formule sera vérifiée pour tout entier $n \geqslant 1$.

Raisonnement par récurrence
Monotonie d'une suite définie à l'aide d'une fonction

On va utiliser ce raisonnement par récurrence lorsque l'on a une relation du type $U_{n+1} = f\ (\ U_n\ )$.
La seule contrainte sera ici de travailler avec ***une fonction f croissante*** sur un intervalle donné .
En effet, c'est la condition qui permettra de ***conserver l'ordre des inégalités*** et de ***respecter l'hérédité*** .

L'énoncé

On considère une suite définie par la relation $U_{n+1} = \dfrac{3\ \mathrm{Un} + 2}{\mathrm{Un} + 1}$ avec $U_0 = 1$.

On veut montrer que la suite (U_n) est croissante, c'est à dire que $U_{n+1} > U_n$.

La méthode

Préambule

La méthode de base consistant à déterminer le signe de $U_{n+1} - U_n$ serait fastidieuse (on arriverait sur un trinôme du second degré et il faudait alors situer les valeurs de U_n à l'aide d'un encadrement).
De même, tout raisonnement direct par récurrence serait rendu difficile à cause du terme U_n qui se retrouve deux fois dans l'écriture. Il faudrait une dextérité sur les inégalités que peu d'élèves possèdent.

→ le plus simple est d'utiliser la fonction définie par $U_{n+1} = f\ (\ U_n\ )$. On aura $f(x) = \dfrac{3\ x + 2}{x + 1}$.

Mais il faut montrer que f est croissante (sur $[0\ ;\ +\infty[$ car les termes U_n sont clairement positifs).

On a $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+1}$ soit $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ $\left(\text{avec } \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}\right)$

↳ f' est positive sur $[0\ ;+\infty[$ → f est croissante sur $[0\ ;+\infty[$.

Initialisation

On sait que $U_0 = 1$

On calcule $U_1 = \dfrac{3U_0 + 2}{U_0 + 1} = \dfrac{3 \times 1 + 2}{1+1} = \dfrac{5}{2}$

On a donc $U_1 > U_0$.

Hérédité *(qui sera très rapide pour le coup car il suffit d'appliquer la fonction f)*

On suppose donc $U_{n+1} > U_n$

On obtient $f(U_{n+1}) > f(U_n)$ La fonction est CROISSANTE donc elle CONSERVE l'ordre !

soit $U_{n+2} > U_{n+1}$

↳ c'est bon !!

Conclusion et (U_n) est bien croissante !!

Si la propriété est vérifiée au rang *n*
Alors cette propriété reste vérifiée au rang *n + 1*.
Or cette propriété est vérifiée au rang 0.
Donc, d'après le principe de récurrence, la suite est bien croissante pour tout entier *n*.

Raisonnement par récurrence
Monotonie d'une suite définie à l'aide d'une fonction (2)

On va utiliser ce raisonnement par récurrence lorsque l'on a une relation du type $U_{n+1} = f\ (\ U_n\ )$.
La seule contrainte sera ici de travailler avec ***une fonction f croissante*** sur un intervalle donné **.**
En effet, c'est la condition qui permettra de ***conserver l'ordre des inégalités*** et de ***respecter l'hérédité*** .

L'énoncé

On considère une suite définie par la relation $U_{n+1} = 0{,}95\ U_n + 200$ avec $U_0 = 10\ 000$.
On veut montrer que la suite (U_n) est décroissante, c'est à dire que $U_{n+1} < U_n$.

La méthode

Préambule
La méthode de base consistant à déterminer le signe de $U_{n+1} - U_n$ fonctionnerait mais cela demanderait d'encadrer la suite (U_n) afin de pouvoir conclure sur le signe du résultat.
→ le plus simple est d'utiliser la fonction définie par $U_{n+1} = f\ (\ U_n\ )$. On aura $f\ (\ x\ ) = 0{,}95\ x + 200$.
Mais il faut juste montrer que f est croissante .

On a $f(x) = 0{,}95x + 200$ soit $f'(x) = 0{,}95$
→ f' est positive sur $\mathbb{R}$ → f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Initialisation

on sait que $U_0 = 10\ 000$
on calcule $U_1 = 0{,}95 U_0 + 200 = 0{,}95 \times 10\ 000 + 200$
on obtient $U_1 = 9700$ et on a bien $U_1 < U_0$.

Hérédité *(qui sera très rapide pour le coup car il suffit d'appliquer la fonction f)*
On va ici obtenir un résultat qui surprend la première fois qu'on le voit.
En effet, on va travailler avec une fonction <u>croissante</u> qui va nous permettre de montrer que la suite est, quant à elle, <u>décroissante</u>.

on suppose donc $U_{n+1} < U_n$
on obtient $f(U_{n+1}) < f(U_n)$
soit $U_{n+2} < U_{n+1}$

La fonction f est CROISSANTE donc elle conserve l'ordre !

↳ c'est bon !!
et (U_n) est bien décroissante !

Conclusion
Si la propriété est vérifiée au rang n
Alors cette propriété reste vérifiée au rang $n + 1$.
Or cette propriété est vérifiée au rang 0.
Donc, d'après le principe de récurrence, la suite est bien décroissante pour tout entier n.

Raisonnement par récurrence
Encadrement d'une suite définie à l'aide d'une fonction

On va utiliser ce raisonnement par récurrence lorsque l'on a une relation du type $U_{n+1} = f\ (\ U_n\ )$.
La seule contrainte sera ici de travailler avec ***une fonction f croissante*** sur un intervalle donné .
En effet, c'est la condition qui permettra de ***conserver l'ordre des inégalités*** et de ***respecter l'hérédité*** .

L'énoncé

On considère une suite définie par la relation $U_{n+1} = \dfrac{3\,\mathrm{Un}+2}{\mathrm{Un}+1}$ avec $U_0 = 1$.

On veut montrer que, pour tout *n* , on a l'encadrement : $1 \leqslant U_n \leqslant 3$.

La méthode

Préambule

La méthode de base consistant à travailler sur les inégalités, en partant de l'encadrement de U_n , serait ici très piègeuse !! Il faudrait une dextérité sur les inégalités que peu d'élèves possèdent.

→ le plus simple est d'utiliser la fonction définie par $U_{n+1} = f\ (\ U_n\ )$. On aura $f(x) = \dfrac{3\ x+2}{x+1}$.

Mais il faut montrer que f est croissante (sur $[0\ ;+\infty[$ car les termes U_n sont clairement positifs).

On a $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+1}$ soit $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ avec $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

→ f' est positive sur $[0;+\infty[$ → f est croissante sur $[0;+\infty[$

Initialisation

On sait que $U_0 = 1$

Donc on a bien $1 \leq U_0 \leq 3$

L'encadrement est bien vérifié au rang 0 .

Hérédité *(qui sera très rapide pour le coup car il suffit d'appliquer la fonction f)*

on suppose donc $1 \leq U_n \leq 3$

La fonction f est CROISSANTE donc elle conserve l'ordre !

on obtient $f(1) \leq f(U_n) \leq f(3)$

et donc $\underbrace{(1 \leq)}_{\text{évident}} \dfrac{5}{2} \leq U_{n+1} \leq \dfrac{11}{4} \underbrace{(\leq 3)}_{\text{évident}}$

On a bien $1 \leq U_{n+1} \leq 3$

→ c'est bon !!

Conclusion

Si l'encadrement est vérifié au rang *n*
Alors cet encadrement reste vérifié au rang *n + 1*.
Or cet encadrement est vérifié au rang 0.
Donc, d'après le principe de récurrence, l'encadrement sera vérifié pour tout entier *n*.

Raisonnement par récurrence
Encadrement et monotonie en un seul coup (1)

Certains exercices nous proposent de faire un raisonnement par récurrence qui permettra d'un seul coup de prouver la monotonie d'une suite **et** de trouver un encadrement de cette suite.
Si c'est bien maitrisé, cela fait gagner un peu de temps car on fait un seul raisonnement plutôt que deux.

L'énoncé

On considère une suite définie par la relation $U_{n+1} = 0{,}94\, U_n + 1{,}5$ avec $U_0 = 1$.
On veut montrer que ,pour tout n , on a $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 25$.

Cela prouvera en même temps que la suite est croissante (car on a $U_n \leqslant U_{n+1}$) et que la suite est bornée (car elle est encadrée par 0 et par 25).

La méthode

Initialisation

On a $U_0 = 1$

On calcule $U_1 = 0{,}94\, U_0 + 1{,}5$
$= 0{,}94 \times 1 + 1{,}5 = 2{,}44$

Donc on a bien $0 \leq U_0 \leq U_1 \leq 25$

Hérédité

La relation de récurrence entre U_{n+1} et U_n est suffisamment simple pour que l'on puisse partir directement de $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 25$ et que l'on passe au rang d'après en multipliant par 0,94 puis en ajoutant 1,5.

On suppose donc $0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 25$

soit $0 \leq 0{,}94\, U_n \leq 0{,}94\, U_{n+1} \leq 23{,}5$ en multipliant par 0,94.

soit $1{,}5 \leq 0{,}94\, U_n + 1{,}5 \leq 0{,}94\, U_{n+1} + 1{,}5 \leq 25$ en ajoutant 1,5.

On a bien $1{,}5 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 25$

→ c'est bon !!

Conclusion

Si la propriété est vérifiée au rang n
Alors cette propriété reste vérifiée au rang $n + 1$.
Or cette propriété est vérifiée au rang 0.
Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété sera vérifiée pour tout entier n.

Raisonnement par récurrence
Encadrement et monotonie en un seul coup (2)

Certains exercices nous proposent de faire un raisonnement par récurrence qui permettra d'un seul coup de prouver la monotonie d'une suite **et** de trouver un encadrement de cette suite.
Si c'est bien maitrisé, cela fait gagner un peu de temps car on fait un seul raisonnement plutôt que deux.

L'énoncé

On considère une suite définie par la relation $U_{n+1} = 0{,}75\, U_n\ (1 - 0{,}15\, U_n)$ avec $U_0 = 0{,}6$.
On veut montrer que ,pour tout n , on a $0 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n \leqslant 1$.

Cela prouvera en même temps que la suite est décroissante (car on a $U_{n+1} \leqslant U_n$) et que la suite est bornée (car elle est encadrée par 0 et par 1).

La méthode

Préambule
La relation de récurrence entre U_{n+1} et U_n va poser problème à cause du terme U_n qui se retrouve deux fois dans l'écriture. Je rappelle que cela signifierait que tout raisonnement direct par récurrence serait difficile et qu'il faudrait une dextérité sur les inégalités que peu d'élèves possèdent.
→ le plus simple est d'utiliser la fonction définie par $U_{n+1} = f\ (U_n)$.
On aura $f(x) = 0{,}75\, x\ (1 - 0{,}15\, x)$. Et il faut juste montrer que f est croissante sur [0 ; 1].

On a $f(x) = 0{,}75x(1-0{,}15x) \rightarrow f'(x) = -0{,}225x + 0{,}75$
Si $x \in [0;1]$, il est évident que $f'(x) > 0$
Et la fonction f est donc bien croissante sur $[0;1]$.

Initialisation

On a $U_0 = 0{,}6$
On calcule $U_1 = 0{,}75\,U_0\,(1 - 0{,}15\,U_0)$
$= 0{,}75 \times 0{,}6 \times (1 - 0{,}15 \times 0{,}6)$
$= 0{,}4095$
Donc on a bien $0 \leq U_1 \leq U_0 \leq 1$

Hérédité *(qui sera très rapide pour le coup car il suffit d'appliquer la fonction f)*

On suppose donc $0 \leq U_{n+1} \leq U_n \leq 1$
On obtient $f(0) \leq f(U_{n+1}) \leq f(U_n) \leq f(1)$
On a bien $0 \leq U_{n+2} \leq U_{n+1} \leq 0{,}6375\ (\leq 1)$

La fonction f est CROISSANTE donc elle conserve l'ordre !

↳ c'est bon !!

Conclusion
Si la propriété est vérifiée au rang n
Alors cette propriété reste vérifiée au rang $n + 1$.
Or cette propriété est vérifiée au rang 0.
Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété sera vérifiée pour tout entier n.