Extension dans l'espace de formules déjà connues
Coordonnées de vecteurs et du milieu - Distance

Jusque là, vous avez travaillé, dans le plan, en faisant de la géométrie plane. Mais les formules qu'il fallait savoir appliquer par coeur (coordonnées d'un vecteur et d'un milieu, distance entre deux points) restent valables. Il faudra juste travailler en trois dimensions et ajouter la troisième coordonnée z.

Les trois formules à connaitre par coeur

On considère deux points A de coordonnées (x_A ; y_A ; z_A) et B de coordonnées (x_B ; y_B ; z_B).

La formule pour les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

On a $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A \,;\, y_B - y_A \,;\, z_B - z_A)$

La formule pour la distance entre les points A et B (ou distance AB) (ou longueur AB)

On a $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

La formule pour les coordonnées du point M, milieu du segment [AB]

On a $M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} \,;\, \dfrac{y_A + y_B}{2} \,;\, \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$

Application directe

On considère deux points A de coordonnées (3 ; 4 ; - 5) et B de coordonnées (7 ; - 1 ; 2).

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ seront :

On a $\overrightarrow{AB}\,(7-3 \,;\, -1-4 \,;\, 2-(-5))$

soit $\overrightarrow{AB}\,(4 \,;\, -5 \,;\, 7)$

La distance AB entre les points A et B sera égale à :

On a $AB = \sqrt{(7-3)^2 + (-1-4)^2 + (2-(-5))^2}$

soit $AB = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 7^2} = \sqrt{90}$

Les coordonnées du point M, milieu du segment [AB], seront :

On a $M\left(\dfrac{3+7}{2} \,;\, \dfrac{4+(-1)}{2} \,;\, \dfrac{-5+2}{2}\right)$

soit $M\left(5 \,;\, \dfrac{3}{2} \,;\, \dfrac{-3}{2}\right)$

Remarque pour la formule de la distance

Dans cette formule de la distance, il faut se souvenir que, même en travaillant avec des nombres négatifs, il ne restera très rapidement que des nombres positifs (car un nombre au carré est toujours positif !). Donc, si à la fin, il vous reste des "moins" dans cette formule, c'est qu'il y a un problème !

Comment calculer un produit scalaire dans l'espace
Utilisation pour montrer que des vecteurs sont orthogonaux

La formule pratique (valable dans un repère orthonormé)

C'est la même que celle vue en Première. Il faut juste l'étendre au fait d'avoir une troisième coordonnée z .

Avec deux vecteurs $\vec{u}$ de coordonnées (x ; y ; z) et $\vec{v}$ de coordonnées (x' ; y' ; z')

On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = x \times x' + y \times y' + z \times z'$

Propriété fondamentale pour montrer que des vecteurs sont orthogonaux

Comme dans le plan , on aura la propriété suivante (propriété qui sera ***indispensable*** pour la suite) .

Si on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ alors on a $\vec{u} \perp \vec{v}$

Application directe

On considère les points suivants : A (1 ; 2 ; 3) ; B (3 ; 7 ; 9) et C (5 ; -2 ; 5).
On va montrer que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

Cela permettrait que montrer bien sûr que les droites (AB) et (AC) sont orthogonales ou, par exemple, que le triangle ABC est rectangle en A .

On a $\overrightarrow{AB} \left| \begin{array}{l} x_B - x_A = 3-1 = 2 \\ y_B - y_A = 7-2 = 5 \\ z_B - z_A = 9-3 = 6 \end{array} \right.$ et $\overrightarrow{AC} \left| \begin{array}{l} x_C - x_A = 5-1 = 4 \\ y_C - y_A = -2-2 = -4 \\ z_C - z_A = 5-3 = 2 \end{array} \right.$

On calcule alors $\overrightarrow{AB} \left| \begin{array}{c} 2 \\ 5 \\ 6 \end{array} \right. \cdot \overrightarrow{AC} \left| \begin{array}{c} 4 \\ -4 \\ 2 \end{array} \right.$

On obtient $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 4 + 5 \times (-4) + 6 \times 2$

$= 8 - 20 + 12 = 0$

<u>Conclusion</u> : on a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

Donc on a $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

Remarque sur le vocabulaire : perpendiculaire ou orthogonale

Si on sait que deux droites, ***dans l'espace***, vérifient le fait que (d) $\perp$ (d') alors :

- si les droites ***ne sont pas sécantes*** alors on dira qu'elles sont ***orthogonales***.
- si les droites ***sont sécantes*** alors on dira qu'elles sont ***perpendiculaires***.

Comment montrer que deux vecteurs sont orthogonaux : un exercice type

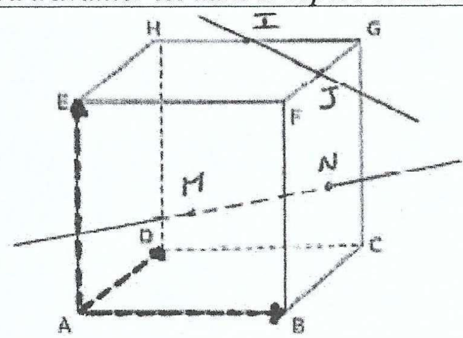
En dehors de certains raisonnements géométriques (par exemple, dans un cube, il y a des droites orthogonales, et donc des vecteurs orthogonaux), le ***principal outil*** pour montrer que des vecteurs sont orthogonaux sera d'utiliser, ***<u>dans un repère orthonormé</u>***, la formule du ***produit scalaire*** .

Définition et propriété (rappel)

Dans un repère orthonormé, le produit scalaire de $\vec{u}\ (x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}\ (x'\,;y'\,;z')$ sera égal à $$\vec{u}\cdot\vec{v} = x\times x' + y\times y' + z\times z'$$
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ($\vec{u}\perp\vec{v}$) si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Application

Dans cet exemple, on va définir, nous mêmes, un repère orthonormé pour exprimer le produit scalaire.
→ *on va travailler ici dans le repère orthonormé* $(A,\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE})$



Le point I est au milieu du segment [HG]

Le point J est au milieu du segment [FG]

Le point M est au centre de la face ABFE

Le point N est au centre de la face BCGF

Montrer que les droites (I J) et (MN) sont orthogonales, c'est à dire (I J) ⊥ (MN) .

Etape 1 : on exprime, dans le repère choisi, les coordonnées de chacun des points I , J , M et N .

On a : $I\left|\begin{matrix}0,5\\1\\1\end{matrix}\right.$ $J\left|\begin{matrix}1\\0,5\\1\end{matrix}\right.$ $M\left|\begin{matrix}0,5\\0\\0,5\end{matrix}\right.$ $N\left|\begin{matrix}1\\0,5\\0,5\end{matrix}\right.$

Etape 2 : on calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{MN}$.

On obtient : $\overrightarrow{IJ}\left|\begin{matrix}1-0,5=0,5\\0,5-1=-0,5\\1-1=0\end{matrix}\right.$ et $\overrightarrow{MN}\left|\begin{matrix}1-0,5=0,5\\0,5-0=0,5\\0,5-0,5=0\end{matrix}\right.$

Etape 3 : on calcule le produit scalaire $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{MN}$ et on conclut.

On a donc $\overrightarrow{IJ}\left|\begin{matrix}0,5\\-0,5\\0\end{matrix}\right. \cdot \overrightarrow{MN}\left|\begin{matrix}0,5\\0,5\\0\end{matrix}\right. = 0,5\times 0,5 + (-0,5)\times 0,5 + 0\times 0$

On obtient $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{MN} = 0$ soit $\overrightarrow{IJ}\perp\overrightarrow{MN}$ ou $(IJ)\perp(MN)$.

Comment trouver la valeur d'un angle avec le produit scalaire

Méthode

On a déjà croisé cette question en classe de Première, mais c'était dans le plan (voir fiches de Première).
La méthode est la même et elle va permettre, dans l'espace, de retrouver un angle lorsque l'on connait les coordonnées de trois points distincts (et non alignés).
Cette méthode consiste à écrire le résultat d'un produit scalaire de deux façons différentes, afin d'égaliser les deux résultats, et ainsi de retrouver l'angle à l'aide du cosinus !

L'énoncé

Dans un repère orthonormé, on considère les points A (- 1 ; 2 ; 0), B (1 ; 2 ; 4) et C (- 1 ; 1 ; 1).
Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ (on arrondira le résultat au degré près).

La solution

on calcule $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} 1-(-1)=2 \\ 2-2=0 \\ 4-0=4 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{vmatrix} -1-(-1)=0 \\ 1-2=-1 \\ 1-0=1 \end{vmatrix}$

Etape 1

on calcule $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} = 2\times 0 + 0\times(-1) + 4\times 1$

$\hookrightarrow$ on obtient $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4$

Etape 2

on utilise la formule $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

et on calcule $AB = \sqrt{(1-(-1))^2+(2-2)^2+(4-0)^2} = \sqrt{20}$

$AC = \sqrt{(-1-(-1))^2+(1-2)^2+(1-0)^2} = \sqrt{2}$

Etape 3

On égalise les deux résultats et on obtient :

$(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} =)\ \sqrt{20}\times\sqrt{2}\times\cos(\widehat{BAC}) = 4$

soit $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{4}{\sqrt{20}\times\sqrt{2}}$

On en déduit : $\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\dfrac{4}{\sqrt{20}\times\sqrt{2}}\right) \approx 51°$

Comment montrer que deux vecteurs de l'espace sont colinéaires

Définition

Comme dans le plan, des vecteurs de l'espace sont *colinéaires* si et seulement si ils ont la même *direction*, c'est à dire s'ils sont "*parallèles*".

Méthode

Dans le ***plan***, on a deux possibilités pour montrer que des vecteurs sont colinéaires (voir fiches de 2nde):

- soit on montre que les *coordonnées sont proportionnelles*
- soit on calcule le *déterminant* (avec un "*produit en croix*") .

Mais, dans ***l'espace***, avec la troisième coordonnée, ***on n'aura plus le choix***.
Seule la méthode utilisant la proportionnalité pourra être utilisée (*et je vous conseille de diviser le vecteur avec les coordonnées ayant les plus grandes valeurs par l'autre vecteur*).

Exemple 1

Les vecteurs $\vec{u}$ (3 ; - 4 ; 5) et $\vec{v}$ (- 12 ; 16 ; - 20) sont ils colinéaires ?

on commence avec $\vec{v}$ qui est plus "grand".

on calcule $-12 : 3 = -4$

$16 : (-4) = -4$

$-20 : 5 = -4$

on obtient bien le même résultat.
Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont COLINÉAIRES.
Et on peut écrire $\vec{v} = -4\vec{u}$

Remarque : les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant colinéaires, les droites ayant ces vecteurs comme vecteur directeur *sont parallèles* entre elles.

Exemple 2

Les vecteurs $\vec{u}$ (6 ; - 8 ; - 15) et $\vec{v}$ (3 ; - 4 ; - 5) sont ils colinéaires ?

on commence avec $\vec{u}$ qui est plus "grand".

on calcule $6 : 3 = 2$

$-8 : (-4) = 2$

$-15 : (-5) = 3$

On n'obtient pas le même résultat.
Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Remarque : les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'étant pas colinéaires, les droites ayant ces vecteurs comme vecteur directeur *ne sont pas parallèles* entre elles. Mais attention, ces droites ne sont pas forcément sécantes, car elles peuvent être "*ni parallèles ni sécantes*".

Vecteurs colinéaires (droites parallèles, points alignés ou non)
Comment montrer que trois points forment un plan

Utilisation de la colinéarité

→ pour vérifier que deux droites sont ***parallèles***, si on connait leurs vecteurs directeurs.

→ pour vérifier l'alignement de 3 points :

- si les trois points ***sont alignés***, alors ces trois points définissent une ***droite***.
- si les trois points ***ne sont pas alignés*** , alors ces trois points définissent un ***plan*** .

Exemple 1

Montrons que les points A (- 1 ; 2 ; - 3), B (3 ; - 1 ; 4) et C (4 ; - 1 ; 2) définissent un plan

→ **on va donc montrer que les trois points A, B et C** ***<u>ne sont pas alignés</u>***.

On calcule $\overrightarrow{AB} \left| \begin{array}{l} 3-(-1)=4 \\ -1-2=-3 \\ 4-(-3)=7 \end{array} \right.$ et $\overrightarrow{AC} \left| \begin{array}{l} 4-(-1)=5 \\ -1-2=-3 \\ 2-(-3)=5 \end{array} \right.$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

car $5 : 4 = 1,25$ (les résultats sont différents !)

$-3 : (-3) = 1$

Donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

Donc les points A, B et C définissent un plan noté (ABC).

Remarque : *si les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *avaient été colinéaires, alors les points A, B et C auraient été alignés et ils auraient donc définie une* ***droite*** .

Exemple 2

On considère les points E (1 ; 2 ; 3), F (5 ; 6 ; 6), G (- 1 ; 0 ; 0,5) et H (1 ; 2 ; 2).

Montrons que les droites (EF) et (GH) sont parallèles.

→ **on va donc montrer que les vecteurs** $\overrightarrow{EF}$ **et** $\overrightarrow{GH}$ ***<u>sont colinéaires</u>***.

On calcule $\overrightarrow{EF} \left| \begin{array}{l} 5-1=4 \\ 6-2=4 \\ 6-3=3 \end{array} \right.$ et $\overrightarrow{GH} \left| \begin{array}{l} 1-(-1)=2 \\ 2-0=2 \\ 2-0,5=1,5 \end{array} \right.$

Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont colinéaires

car $4 : 2 = 2$

$4 : 2 = 2$ (les résultats sont égaux !)

$3 : 1,5 = 2$

Donc les droites (EF) et (GH) sont parallèles.

Remarque : *si les vecteurs n'avaient pas été colinéaires, alors les droites (EF) et (GH) n'auraient pas été parallèles. Mais cela ne signifie pas forcément qu'elles sont sécantes quand on est dans l'espace.*

Les positions relatives de deux plans dans l'espace

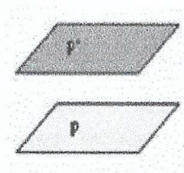
Il faudra dans cette partie *imager* les situations : les *plans* sont comme des livres et les *droites* comme des stylos. N'oubliez pas qu'en mathématiques, la manipulation des objets est fondamentale ; prenez des livres et des stylos dans vos mains pour ***manipuler*** tant qu'il le faudra !

Positions relatives de deux plans

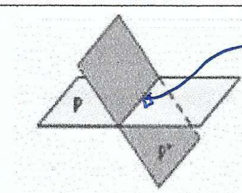
Deux plans dans l'espace n'ont que ***deux positions relatives*** possibles :
- → les plans peuvent être ***parallèles***.
- → les plans peuvent être ***sécants***. Dans ce cas, ***l'intersection*** des deux plans est une ***droite***.

Illustration graphique

Les plans P et P' sont PARALLELES



Les plans P et P' sont SECANTS



c'est la droite d'intersection

Cas particuliers

Deux plans ***confondus*** représentent un cas particulier de deux plans ***parallèles***.
Deux plans ***orthogonaux*** représentent un cas particulier de deux plans ***sécants***.

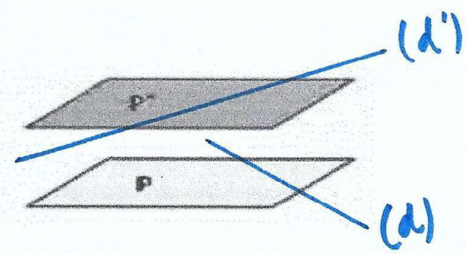
Conséquence en terme de raisonnement mathématiques

Pour bien raisonner, ayez bien en tête qu'il n'y a que deux positions possibles entre deux plans.

Et donc, pour montrer que deux plans SONT SECANTS,
il suffira de montrer que ces deux plans NE SONT PAS PARALLELES.

Attention aux idées reçues

Ce chapitre nécessite, comme toujours, un apprentissage par coeur des propriétés et des méthodes ... mais cela ne suffira pas ! Il faudra travailler sur une certaine visualisation des situations proposées car il ne suffira pas de réciter son cours. Voici un exemple pour s'en convaincre :



Les droites (d) et (d') sont contenues dans des plans qui sont parallèles entre eux.
Mais (d) et (d') ne sont pas parallèles.

Les positions relatives d'une droite et d'un plan

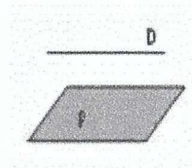
Il faudra dans cette partie *imager* les situations : les *plans* sont comme des livres et les *droites* comme des stylos. N'oubliez pas qu'en mathématiques, la manipulation des objets est fondamentale ; prenez des livres et des stylos dans vos mains pour ***manipuler*** tant qu'il le faudra !

Positions relatives d'un plan et d'une droite

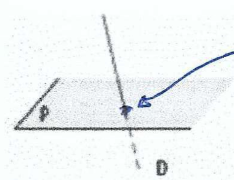
Un plan et une droite dans l'espace n'ont que ***deux positions relatives*** possibles :
- → un plan et une droite peuvent être ***parallèles***.
- → un plan et une droite peuvent être ***sécants***. Dans ce cas, ***l'intersection*** entre les deux est un ***point***.

Illustration graphique

Le plan P et la droite (D) sont PARALLELES



Le plan P et la droite (D) sont SECANTS



c'est le point d'intersection.

Cas particuliers

Une droite ***contenue*** dans un plan représente un cas particulier de "***parallèle*** à ce plan".
Une droite ***orthogonale*** à un plan représente un cas particulier de "***sécante*** à ce plan".

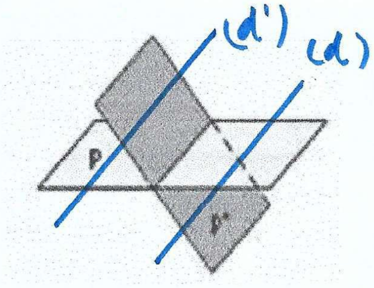
Conséquence en terme de raisonnement mathématiques

Pour bien raisonner, ayez bien en tête qu'il n'y a que deux positions possibles entre un plan et une droite.

Et donc, pour montrer qu'un plan et une droite SONT SECANTS,
il suffira de montrer que ce plan et cette droite NE SONT PAS PARALLELES.

Attention aux idées reçues

Ce chapitre nécessite, comme toujours, un apprentissage par coeur des propriétés et des méthodes ... mais cela ne suffira pas ! Il faudra travailler sur une certaine visualisation des situations proposées car il ne suffira pas de réciter son cours. Voici un exemple pour s'en convaincre :



Les droites (d) et (d') sont contenues dans des plans sécants entre eux.
Mais (d) et (d') sont parallèles !

Les positions relatives de deux droites dans l'espace

Il faudra dans cette partie *imager* les situations : les *plans* sont comme des livres et les *droites* comme des stylos. N'oubliez pas qu'en mathématiques, la manipulation des objets est fondamentale ; prenez des livres et des stylos dans vos mains pour ***manipuler*** tant qu'il le faudra !

Positions relatives de deux droites

Deux droites dans l'espace auront ***trois (c'est la nouveauté) positions relatives*** possibles :

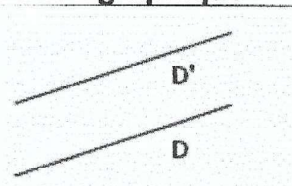
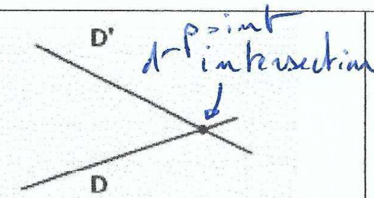
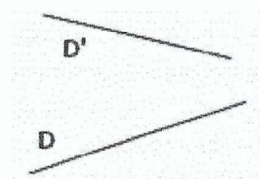
→ elles peuvent être ***parallèles***.

→ elles peuvent être ***sécantes***. Dans ce cas, ***l'intersection*** des deux droites est un ***point***.

→ **et il existe une troisième position** : elles peuvent être ***ni parallèles ni sécantes***.

La nouveauté est bien dans cette troisième possibilité qui n'existait pas en géométrie plane.

Illustration graphique

 Les droites (*D*) et (*D '*) sont ***parallèles***.	 Les droites (*D*) et (*D '*) sont ***sécantes***.	 Les droites (*D*) et (*D '*) sont "***ni parallèles,ni sécantes***". *Il faut "imaginer" (D ') passant "au-dessus" de (D).*

Droites coplanaires, droites non coplanaires

Lorsque des droites sont "***ni parallèles ni sécantes***", les deux droites ne peuvent pas être comprises dans un même plan : on dit que les droites ***ne sont pas coplanaires***.
Par contre, elles seront ***coplanaires*** (dans un même plan) si elles sont ***parallèles*** ou ***sécantes***.

Conséquence en terme de raisonnement mathématiques

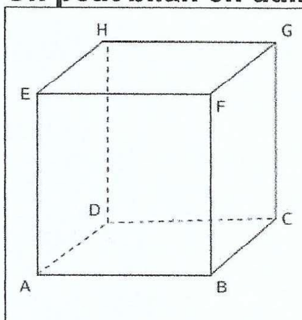
Tout cela va compliquer sensiblement la tâche pour les raisonnements.

En effet, pour montrer que deux droites sont ***sécantes*** dans l'espace,
il **ne suffira plus** de montrer qu'elles ne sont pas ***parallèles*** !
Car il y a donc cette troisième possibilité, et elles pourront être "***ni parallèles ni sécantes***".

Vocabulaire et cas particuliers

On dit "***perpendiculaires***" pour deux droites qui sont en position d'angle droit en étant sécantes.
On dit "***orthogonales***" pour deux droites qui sont en position d'angle droit mais qui ne sont pas sécantes.
Deux droites ***confondues*** représentent un cas particulier de deux droites ***parallèles***.

Un petit bilan en utilisant un objet bien connu : le cube

	. Les droites (FB) et (GC) sont ***parallèles***. . Les droites (EH) et (HG) sont ***sécantes*** : on peut même dire qu'elles sont ***perpendiculaires***. . Les droites (EF) et (HD) sont "***ni parallèles ni sécantes***" , elles sont donc ***non coplanaires***. Mais, comme elles sont en position d'angle droit, on peut dire que ces droites sont ***orthogonales***.

La représentation paramétrique d'une droite

Dans le plan, il y avait deux types d'équations possibles pour les droites : l'équation *réduite* ($y = ax + b$) ou l'équation *cartésienne* ($ax + by + c = 0$). Dans l'espace, une droite se définira avec une *représentation paramétrique*, c'est à dire avec un système de trois *équations paramétriques*.

Définition et propriété de la représentation paramétrique

Pour écrire une représentation paramétrique d'une droite, il nous faudra :

- un ***point*** de cette droite.
- un ***vecteur directeur*** de cette droite.
- un ***paramètre*** , c'est à dire un réel quelconque, que l'on notera (souvent) t ou k .

Du coup, toute droite (d) de l'espace sera caractérisée par un système d'équations paramétriques du type :

c'est le paramètre

$$\begin{cases} x = \boxed{x_A} + k \boxed{u_x} \\ y = \boxed{y_A} + k \boxed{u_y} \\ z = \boxed{z_A} + k \boxed{u_z} \end{cases}$$

coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (d).

coordonnées d'un point de la droite

Application

Donner une représentation paramétrique de la droite (AB), avec les points A (3 ; 4 ; - 5) et B (1 ; 9 : 2).

On calcule $\overrightarrow{AB}$ $\left| \begin{array}{l} 1-3=-2 \\ 9-4=5 \\ 2-(-5)=7 \end{array} \right.$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est bien sûr un vecteur directeur de la droite (AB) !

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

c'est le vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$

$$\begin{cases} x = \boxed{3} + k \times \boxed{(-2)} \\ y = \boxed{4} + k \times \boxed{5} \\ z = \boxed{-5} + k \times \boxed{7} \end{cases} \longrightarrow \text{soit} \begin{cases} x = 3 - 2k \\ y = 4 + 5k \\ z = -5 + 7k \end{cases}$$

on a mis le point A mais on aurait pu prendre B

Remarque : en remplaçant le paramètre k par un nombre, on peut obtenir n'importe quel point de la droite.

- si on remplace k par 0 , on peut vérifier que l'on obtient le point A.
- si on remplace k par 1 , on peut vérifier que l'on obtient le point B.
- si on remplace k par 2 , on obtient encore un autre point de cette droite.

Ce point aura alors comme coordonnées $\begin{cases} x = 3 - 2\times2 \\ y = 4 + 5\times2 \\ z = -5 + 7\times2 \end{cases}$, c'est à dire $\begin{cases} x = -1 \\ y = 14 \\ z = 9 \end{cases}$.

Comment montrer qu'un point appartient à une droite

Le principe générale de la méthode

Etant donnée une *droite*, dont on connait une *représentation paramétrique*, on pourra vérifier si un point *appartient* à cette droite. Pour cela, il faut qu'il existe ***une même valeur du paramètre*** qui permette d'obtenir les coordonnées de ce point.
Du coup, on devra résoudre *3 petites équations* afin de trouver cette éventuelle valeur du paramètre.

Application

On considère la droite (d) définie par une représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1+2k \\ y = -3+4k \\ z = 5-k \end{cases}$

a) Le point A (9 ; 13 ; 1) appartient-il à la droite (d) ?
b) Le point B (7 ; 5 ; 3) appartient-il à la droite (d) ?

a) on résout le système $\begin{cases} 1+2k = 9 \\ -3+4k = 13 \\ \underbrace{5-k}_{\text{c'est la droite } (d)} = \underbrace{1}_{\text{c'est le point A}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2k = 8 \\ 4k = 16 \\ -k = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k = 4 \\ k = 4 \\ k = 4 \end{cases}$

On obtient bien la même valeur pour le paramètre k.
↳ Donc le point A appartient à la droite (d).

b) on résout le système $\begin{cases} 1+2k = 7 \\ -3+4k = 5 \\ \underbrace{5-k}_{\text{c'est la droite } (d)} = \underbrace{3}_{\text{c'est le point B}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2k = 6 \\ 4k = 8 \\ -k = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k = 3 \\ k = 2 \\ k = 2 \end{cases}$

On n'obtient pas la même valeur pour le paramètre k.
↳ Donc le point B n'appartient pas à la droite (d).

Cas particulier

Il est parfois inutile de faire des calculs. C'est le cas, par exemple, lorsqu'une des coordonnées de l'équation paramétrique de la droite ne dépend justement pas du paramétre.

Ainsi, le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$ ne peut pas appartenir à la droite définie par $\begin{cases} x = 1+3k \\ y = 10 \\ z = 6+k \end{cases}$.

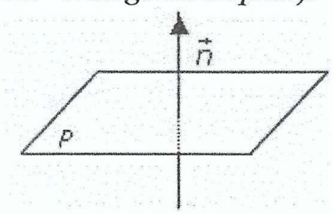
En effet, l'ordonnée du point est égale à 9 : elle ne pourra jamais être égale à 10 et ainsi correspondre à l'équation paramétrique de la droite.

Vecteur normal : La définition et comment montrer qu'un vecteur est normal à un plan

Trouver un *vecteur normal* à un plan sera essentiel pour la suite. Cela permettra de déterminer les *positions relatives* d'un plan avec d'autres objets de l'espace ou d'obtenir l'*équation cartésienne* du plan.

Définition

Un vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal à un plan P s'il est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à ce plan (*le vecteur est alors "visuellement" orthogonal au plan*).



Propriété

Un vecteur $\vec{n}$ est ***normal*** à un plan P s'il est ***orthogonal à deux vecteurs non colinéaires*** de P.

Méthode à utiliser

Pour montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC), on vérifiera que $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (*on peut aussi raisonner avec* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BC}$ *ou bien encore avec* $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{BC}$).
On utilisera donc le ***produit scalaire*** (si on est bien dans un repère orthonormé), qui devra être égal à zéro afin de conclure que $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$.

Application

On considère les points A (0 ; 1 ; 0), B (1 ; 2 ; 2) et C (1 ; 0 ; 0) qui forment un plan (ABC).
On donne F (0 ; 0 ; 2) et D (2 ; 2 ; 0) et on va montrer que $\overrightarrow{FD}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Certains exercices demandent de vérifier que les points A, B et C forment bien un plan. On rappelle donc qu'il suffit de montrer que ces trois points A, B et C ne sont pas alignés !

On calcule $\overrightarrow{AB} \left| \begin{array}{l} 1-0=1 \\ 2-1=1 \\ 2-0=2 \end{array} \right.$ et $\overrightarrow{AC} \left| \begin{array}{l} 1-0=1 \\ 0-1=-1 \\ 0-0=0 \end{array} \right.$

On calcule aussi $\overrightarrow{FD} \left| \begin{array}{l} 2-0=2 \\ 2-0=2 \\ 0-2=-2 \end{array} \right.$

On a donc $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{AB} = \left| \begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ -2 \end{array} \right. \cdot \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right. = 2 \times 1 + 2 \times 1 + (-2) \times 2 = \boxed{0}$

et $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{AC} = \left| \begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ -2 \end{array} \right. \cdot \left| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right. = 2 \times 1 + 2 \times (-1) + (-2) \times 0 = \boxed{0}$

On a donc $\overrightarrow{FD} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FD} \perp \overrightarrow{AC}$

↳ $\overrightarrow{FD}$ est donc un vecteur normal au plan (ABC).

Equation cartésienne d'un plan
Comment montrer qu'un point appartient à un plan

Equation cartésienne d'un plan

Tout plan P de l'espace pourra s'écrire à l'aide d'une *équation cartésienne* du type $\mathbf{ax + by + cz + d = 0}$, où le vecteur de coordonnées (a ; b ; c) est un *vecteur normal* au plan P.

$\underbrace{3}_{a}x + \underbrace{4}_{b}y + \underbrace{5}_{c}z + 6 = 0$ est l'équation cartésienne d'un plan ayant $\vec{n}\,(3\,;4\,;5)$ comme vecteur normal.

$8x - z + 3 = 0$ ($\rightarrow$ soit $\underbrace{8}_{a}x + \underbrace{0}_{b}y - \underbrace{1}_{c}z + 3 = 0$) est l'équation cartésienne d'un plan ayant $\vec{n}\,(8\,;0\,;-1)$ comme vecteur normal.

Une petite remarque :
Les équations cartésiennes suivantes ($x+2y+5z+6=0$ et $2x+4y+10z+12=0$) définissent un même plan car on passe d'une équation à l'autre en multipliant ou en divisant tous les coefficients par 2 .

Appartenance d'un point à un plan

On considère un plan P d'équation cartésienne $\mathbf{ax + by + cz + d = 0}$.
Un point A, de coordonnées (x_A , y_A , z_A), appartiendra au plan P si les coordonnées de ce point vérifient l'équation du plan.
$\rightarrow$ on remplace x , y et z par les coordonnées du point A et on doit obtenir un résultat égal à 0.

Exemples

a) Le point A (3 ; 2 ; 4) appartient-il au plan P d'équation $5x - 6y + z - 7 = 0$?

On remplace x, y et z par les coordonnées de A
$\rightarrow$ on calcule $5\times\underbrace{3}_{x_A} - 6\times\underbrace{2}_{y_A} + \underbrace{4}_{z_A} - 7$ et on obtient 0 !

Donc le point A appartient bien au plan P.

b) Le point B (5 ; - 1 ; 6) appartient-il au plan P' d'équation $2x - 3y - 4z + 8 = 0$?

On remplace x, y et z par les coordonnées de B
$\rightarrow$ on calcule $2\times 5 - 3\times(-1) - 4\times 6 + 8 = -3 \neq 0$
on n'obtient pas 0 .
Donc le point B n'appartient pas au plan P'.

Comment trouver l'équation cartésienne d'un plan : la méthode

Le principe de la méthode

On va voir ici une méthode qui utilise le vecteur normal.
→ on remplace les nombres a , b et c de l'équation du plan par les coordonnées de ce vecteur normal.
→ on trouve ensuite la valeur du nombre d , en utilisant l'appartenance d'un point à ce plan.

Comment retrouver l'équation cartésienne d'un plan

Cette question qui consiste à retouver l'équation cartésienne d'un plan se retrouve très souvent dans des exercices qui enchainent les trois questions ci-dessous.
Les méthodes pour répondre aux deux premières questions sont disponibles sur les fiches précédentes de ce chapitre. Et nous allons donc surtout détailler la méthode pour la question 3 .

Dans un repère orthonormé, on donne les points A(1 ; 1 ; 1) , B(3 ; 3 ; - 1) et C(- 1 ; 3 ; 2).
Question 1 : Montrer que les points A, B et C définissent un plan.
Question 2 : Montrer que le vecteur $\vec{n}$ (3 ; 1 ; 4) est un vecteur normal à ce plan (*ABC*).
Question 3 : En déduire une équation cartésienne du plan (*ABC*).

→ ***Question 1*** : Montrer que les points A, B et C définissent un plan.
On doit montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
On calcule donc les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ pour montrer qu'ils ne sont pas colinéaires.

→ ***Question 2*** : Montrer que le vecteur $\vec{n}$ (3 ; 1 ; 4) est un vecteur normal à ce plan (ABC).
On doit montrer que $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC).
Par exemple, on montre $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$ en utilisant le produit scalaire.

→ ***Question 3*** : En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
C'est la question qui nous intéresse tout particulièrement pour cette fiche.

* On sait que $\vec{n}\,(\underbrace{3}_{a} ; \underbrace{1}_{b} ; \underbrace{4}_{c})$ est un vecteur normal au plan (ABC)

L'équation cartésienne de ce plan s'écrira alors :

$$\underbrace{3}_{a}x + \underbrace{1}_{b}y + \underbrace{4}_{c}z + d = 0$$

* Il nous reste à déterminer la valeur de d.

On utilise, par exemple, que $A \in (ABC)$
et on remplace x, y et z par les coordonnées de A.

On obtient : $3 \times \underbrace{1}_{x_A} + 1 \times \underbrace{1}_{y_A} + 4 \times \underbrace{1}_{z_A} + d = 0 \to 8 + d = 0$
$\to d = -8$

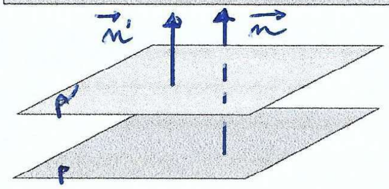
* L'équation cartésienne du plan (ABC) est donc :

$$3x + 1y + 4z - 8 = 0$$

ou $3x + y + 4z - 8 = 0$.

Comment montrer que deux plans sont parallèles

On utilise le *vecteur normal* de chacun des plans.
Si ces *vecteurs normaux* sont ***colinéaires***, alors les plans sont ***parallèles***.



Si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires
Alors on aura $(P) // (P')$.

Montrons que les plans $(P) : 3x + y - 2z + 4 = 0$ et $(P') : 6x + 2y - 4z + 1 = 0$ sont parallèles.

$\vec{n}(3\,;1\,;-2)$ est un vecteur normal au plan (P).
$\vec{n'}(6\,;2\,;-4)$ est un vecteur normal au plan (P').
Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires (on a $\vec{n'} = 2\vec{n}$)
Donc les plans (P) et (P') sont parallèles.

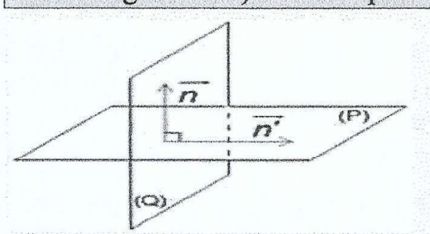
Comment montrer que deux plans sont sécants

Cest une évidence si on a bien en tête qu'il n'y a que deux positions relatives possibles entre des plans.

Pour montrer que deux plans sont *sécants*, il suffit de montrer qu'ils ne sont pas parallèles.
Donc, il suffira de montrer que les *vecteurs normaux* ***<u>ne sont pas</u>*** colinéaires.

Comment montrer que deux plans sont perpendiculaires

C'est un cas particulier de deux plans sécants. Si les vecteurs normaux sont ***orthogonaux*** (produit scalaire égal à zéro) alors les plans sont ***perpendiculaires.***



Si on a $\vec{n} \perp \vec{n'}$ (c'est à dire $\vec{n}.\vec{n'} = 0$)
Alors on aura $(P) \perp (Q)$.

Montrons que les plans $(P) : 3x - y + 2z + 6 = 0$ et $(Q) : 4x - 2y - 7z + 1 = 0$ sont perpendiculaires.

$\vec{n}(3\,;-1\,;2)$ est un vecteur normal au plan (P).
$\vec{n'}(4\,;-2\,;-7)$ est un vecteur normal au plan (Q).
On calcule $\vec{n}.\vec{n'} = \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 \\ -2 \\ -7 \end{vmatrix} = 3 \times 4 + (-1) \times (-2) + 2 \times (-7) = \boxed{0}$

On a donc $\vec{n}.\vec{n'} = 0 \rightarrow \vec{n} \perp \vec{n'} \rightarrow (P) \perp (Q)$.

Comment trouver la droite d'intersection entre deux plans

Dans un premier temps, on pourrait montrer que les deux plans sont bien *sécants*.
Ensuite, on pourra donc déterminer la *droite d'intersection*, en obtenant sa *représentation paramétrique*.
Attention, c'est assez technique et il faudra bien suivre la méthode proposée.
En effet, on va se retrouver avec un système de 2 équations à 3 inconnues.
Ce système ne pourra se résoudre que si une des coordonnées prend le rôle du paramètre k (on donne souvent ce rôle à la troisième coordonnée z).
Puis, en utilisant la méthode de la substitution, on résout le système en exprimant les deux autres coordonnées en fonction de ce paramètre.

Un exemple d'énoncé

On considère les plans $(P): 2x+3y-z+2=0$ et $(Q): x+y-2z+5=0$.
Déterminer l'équation de la droite d'intersection de ces deux plans.

La solution

Certains exercices demandent de vérifier au préalable que les plans (P) et (Q) sont bien sécants.
On rappelle donc qu'il suffit de montrer que les vecteurs normaux (2 ; 3 ; - 1) et (1 ; 1 ; - 2) ne sont pas colinéaires. Ce qui est assez évident ici.

On résout le système $\begin{cases} 2x+3y-z+2=0 \\ x+y-2z+5=0 \end{cases}$

→ on fixe $z=k$ et on remplace donc z par la lettre k

On obtient $\begin{cases} 2x+3y-\boxed{k}+2=0 \\ x+y-\boxed{2k}+5=0 \\ z=k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x+3y=k-2 \\ x+y=2k-5 \\ z=k \end{cases}$

on a remplacé z par k

On obtient $\begin{cases} 2(-y+2k-5)+3y=k-2 \\ x=-y+2k-5 \\ z=k \end{cases}$ ← on a isolé x !

on a remplacé x par $-y+2k-5$

On obtient $\begin{cases} y=-3k+8 \\ x=-(-3k+8)+2k-5 \\ z=k \end{cases}$ soit $\begin{cases} x=\boxed{-13}\boxed{+5}k \\ y=\boxed{8}\boxed{-3}k \\ z=\boxed{0}\boxed{+1}k \end{cases}$

un point — un vecteur directeur

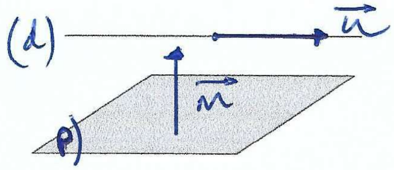
on a remplacé y par $-3k+8$

La droite d'intersection est donc la droite de vecteur directeur $(5\,;-3\,;1)$ et passant par le point $(-13\,;8\,;0)$.

Etude de l'intersection entre un plan et une droite

Comment montrer qu'un plan et une droite sont parallèles

On utilise un *vecteur normal* du plan et un *vecteur directeur* de la droite.
Si ces vecteurs sont ***orthogonaux*** (on utilise le produit scalaire), alors le plan et la droite sont ***parallèles.***



Si on a $\vec{n} \perp \vec{u}$ (soit $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$)

Alors on a $(d) // (P)$.

Montrons que le plan (P) : $3x + y - 2z + 4 = 0$ et la droite (d) : $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 3 - 4k \\ z = 2 + k \end{cases}$ ***sont parallèles.***

$\vec{n}(3;1;-2)$ est un vecteur normal au plan (P).
$\vec{u}(2;-4;1)$ est un vecteur directeur de la droite (d).
On calcule $\vec{n} \cdot \vec{u} = 3 \times 2 + 1 \times (-4) + (-2) \times 1 = \boxed{0}$
$\hookrightarrow$ on a $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ soit $\vec{n} \perp \vec{u}$ $\rightarrow$ on a $(d) // (P)$.

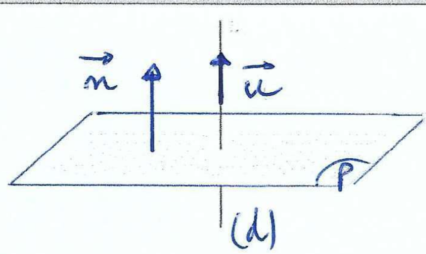
Comment montrer qu'un plan et une droite sont sécants

Cest une évidence si on a bien en tête qu'il n'y a que deux positions possibles entre un plan et une droite.

Pour montrer qu'un plan et une droite sont *sécants*, il suffit de montrer qu'ils ne sont pas parallèles.
Donc, il suffira de montrer que les *vecteurs normaux* du plan et *vecteurs directeurs* de la droite ***<u>ne sont pas</u>*** orthogonaux (produit scalaire différent de zéro).

Comment montrer qu'un plan et une droite sont perpendiculaires

C'est un cas particulier d'un plan et d'une droite sécants. Si un *vecteur normal* du plan et un *vecteur directeur* de la droite sont ***colinéaires*** alors le plan et la droite sont ***perpendiculaires***.



Si $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

Alors on a $(d) \perp (P)$.

Montrons que le plan (P) : $6x - 2y + 4z + 1 = 0$ et la droite (d) : $\begin{cases} x = 2 - 3k \\ y = 1 + k \\ z = 5 - 2k \end{cases}$ ***sont perpendiculaires.***

$\vec{n}(6;-2;4)$ est un vecteur normal au plan (P).
$\vec{u}(-3;1;-2)$ est un vecteur directeur de la droite (d).
On peut vérifier que $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires (on a $\vec{n} = -2\vec{u}$)
On a donc bien $(d) \perp (P)$.

Comment trouver les coordonnées du point d'intersection entre un plan et une droite

La méthode

Elle consiste à déterminer la valeur du paramètre k qui va correspondre à cette intersection.
Pour cela, on va remplacer les "x , y et z" de l'équation du plan par les "x , y et z" de la droite.
On va donc se retouver avec une équation à une inconnue (qui sera le paramètre k).
On résout alors cette équation afin de déterminer la valeur de ce paramètre k. et on en déduit ensuite les coordonnées du point d'intersection en remplaçant k dans la droite (d).

Un exemple d'énoncé

On considère le plan (P) : $3x + y - 5z + 6 = 0$ et la droite (d) : $\begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = 2 - 3k \\ z = 5 + k \end{cases}$

Déterminer les coordonnées du point d'intersection entre le plan et la droite.

La solution

On part de : $3x + y - 5z + 6 = 0$

on remplace x par $-1+2k$ — on remplace y par $2-3k$ — on remplace z par $5+k$

On obtient : $3(-1+2k)+(2-3k)-5(5+k)+6=0$

soit $-3+6k+2-3k-25-5k+6=0$

soit $-2k-20=0$

soit $k=-10$

On a résolu l'équation nous donnant la valeur du paramètre k → on remplace donc k par -10 dans la droite (d) pour obtenir le point d'intersection.

On obtient $\begin{cases} x = -1+2\times(-10) = -21 \\ y = 2-3\times(-10) = 32 \\ z = 5+(-10) = -5 \end{cases}$

↝ le point d'intersection a pour coordonnées $(-21;32;-5)$.

Etude de l'intersection entre deux droites

L'étude de l'intersection entre deux droites amène trois possibilités de réponses et il faudra éviter l'erreur qui consiste à affirmer "j'ai deux droites de l'espace qui ne sont pas parallèles, elles sont donc sécantes".

Un rappel des trois positions relatives

Deux droites de l'espace peuvent être ***sécantes*** (elles sont alors ***coplanaires***). Le seul moyen de savoir si elles sont sécantes est d'appliquer le calcul de la fiche suivante qui consiste à chercher et à trouver (ou non) les coordonnées de leur point d'intersection. *Cas particulier : si les droites forment en plus un angle droit, alors elles sont* ***perpendiculaires****.*
Deux droites peuvent être ***parallèles***. Elles seront à nouveau ***coplanaires***. *Cas particulier : elles peuvent être* ***confondues*** *(c'est donc la même droite !).*
Deux droites peuvent être "***ni parallèles ni sécantes***". C'est le seul cas où les droites ***ne sont pas coplanaires*** (aucun plan ne contient les deux droites). *Cas particulier : si les droites sont en position d'angle droit, alors elles sont* ***orthogonales****.*

Comment montrer que deux droites sont parallèles

On utilise un *vecteur directeur* de chacune des droites et on montre que ces vecteurs sont *colinéaires*.

Les droites $(d) : \begin{cases} x = 2 - 3k \\ y = 1 + k \\ z = 5 - 2k \end{cases}$ ***et*** $(d') : \begin{cases} x = 8 + 9k \\ y = -3 - 3k \\ z = 5 + 6k \end{cases}$ ***sont elles parallèles ?***

$\vec{u}(-3 ; 1 ; -2)$ est un vecteur directeur de la droite (d).

$\vec{u'}(9 ; -3 ; 6)$ est un vecteur directeur de la droite (d').

On peut vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires $(\vec{u'} = -3\vec{u})$

Donc les droites (d) et (d') sont bien parallèles.

Comment montrer que deux droites sont perpendiculaires ou orthogonales

On utilise un *vecteur directeur* de chacune des droites et on montre que ces vecteurs sont *orthogonaux*.

Les droites $(d) : \begin{cases} x = 2k \\ y = 1 + 6k \\ z = 6 - 4k \end{cases}$ ***et*** $(d') : \begin{cases} x = 2 + 5k \\ y = 1 + k \\ z = 4k \end{cases}$ ***sont-elles orthogonales ?***

$\vec{u}(2 ; 6 ; -4)$ est un vecteur directeur de la droite (d).

$\vec{u'}(5 ; 1 ; 4)$ est un vecteur directeur de la droite (d').

On calcule $\vec{u} . \vec{u'} = 2 \times 5 + 6 \times 1 + (-4) \times 4$

On obtient $\vec{u} . \vec{u'} = 0$

On a donc $\vec{u} \perp \vec{u'}$ et donc $(d) \perp (d')$.

Pour pouvoir affirmer que ces droites sont perpendiculaires, il faudrait en plus montrer qu'elles sont sécantes (on appliquerait alors la méthode de la fiche suivante).

Comment trouver le point d'intersection de deux droites

Méthode

Le principe général est de résoudre trois équations entre les coordonnées de chacune des deux droites.
Avec quelques règles essentielles à respecter :

- il faut que les deux droites soient écrites avec deux paramètres différents (k et k' par exemple), même si l'énoncé ne l'a pas lui-même fait avant !
- on isole un des deux paramètres (k ou k') en privilégiant une équation dans laquelle le paramètre isolé n'a pas de coefficient devant. (*afin de ne pas avoir de division à faire !*).
- on remplace alors le paramètre isolé dans les deux autres équations (*et il faut bien garder les trois équations jusqu'au bout car la réponse finale provient de la cohérence de ces trois équations !*).
- si les deux droites sont bien sécantes, on trouvera des valeurs cohérentes pour k et pour k' (*que l'on pourra vérifier si elles nous donnent bien les coordonnées d'un même point !*).

L'énoncé

Les droites $(d) : \begin{cases} x = 9 + k \\ y = -1 + 2k \\ z = -3k \end{cases}$ et $(d') : \begin{cases} x = k' \\ y = 2 - k' \\ z = -1 + k' \end{cases}$ sont elles sécantes ?

La solution

On résout le système $\begin{cases} 9+k = k' \\ -1+2k = 2-k' \\ -3k = -1+k' \end{cases}$

→ on va utiliser la première équation pour isoler k'
et remplacer k' par $9+k$ dans les deux autres équations

On obtient $\begin{cases} k' = 9+k \\ -1+2k = 2-(9+k) \\ -3k = -1+(9+k) \end{cases}$ soit $\begin{cases} k' = 9+k \\ -1+2k = 2-9-k \\ -3k = -1+9+k \end{cases}$

On obtient $\begin{cases} k' = 9+k \\ 3k = -6 \\ -4k = 8 \end{cases}$ soit $\begin{cases} k' = 9+k \\ k = -6 : 3 = -2 \\ k = 8 : (-4) = -2 \end{cases}$ on obtient bien le même résultat !

<u>Conclusion</u>

Les droites sont bien sécantes et on obtient le point d'intersection en remplaçant k par -2 et k' par $\boxed{9+(-2)} = 7$. car $k' = 9+k$

→ pour (d) $\begin{cases} x = 9+(-2) = 7 \\ y = -1+2\times(-2) = -5 \\ z = -3\times(-2) = 6 \end{cases}$ et pour (d') $\begin{cases} x = 7 \\ y = 2-7 = -5 \\ z = -1+7 = 6 \end{cases}$

→ on obtient le point d'intersection $(7 ; -5 ; 6)$.