Un exercice type du bac
avec le corollaire du T V I
et une fonction auxiliaire (2)

Nous allons travailler ici avec une fonction assez simple (même si il faut appliquer la formule ($\frac{u}{v}$)' pour calculer la dérivée) mais le travail et la méthode seraient identiques si on travaillait avec des fonctions utilisant l'*exponentielle* ou le *logarithme neperien*.
Le but est de bien mettre en place le travail avec une fonction auxilaire et de bien comprendre la logique du raisonnement général.

L'énoncé

Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^3 + x - 2}{x^2 + 1}$

Partie A :
On considère la fonction g définie sur $]-\infty\,;+\infty[$ par .$g(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$
1) Etudier les variations de la fonction g .
2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-\infty\,;+\infty[$.
3) Donner un encadrement , à 0,01 près, de cette unique solution que l'on notera α.
4) Donner le tableau de signes de g en fonction de cette solution α.

Partie B :
On va maintenant reprendre la fonction f définie au début de l'exercice.
1) Calculer $f'(x)$ et montrer que que l'on a $f'(x) = \dfrac{(x+1)g(x)}{(x^2+1)^2}$
2) En déduire le tableau de variations de la fonction f (*on utilisera le tableau de signes de g obtenu dans la partie A*).

Le principe de ces exercices est toujours le même :
- *on nous donne une fonction au départ que l'on souhaite étudiée mais on se rend compte à un moment donné que l'étude des signes de la dérivée ne peut être faite avec les outils habituels à disposition.*
- *Cette fonction dérivée doit donc faire l'objet d'une étude à part : c'est à ce moment là que l'on parlera de la fonction auxiliaire qui sera directement égale à la fonction dérivée ou qui s'exprimera en fonction de la fonction dérivée.*
- *C'est dans l'étude de la fonction auxilaire que l'on utilisera le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires. Il nous permettra de prouver l'existence de solutions pour l'équation $f(x) = 0$. Très souvent, on ne pourra pas donner de valeur exate pour cette solution et on la notera α*
- *L'étude de la fonction auxiliaire se conclut avec son tableau de signes (qui dépendra de α).*
  Et après tout s'enchaine :
  on intègre le signe de la fonction auxiliaire dans le tableau de signes de la dérivée f'
  on en déduit les signes de la dérivée f'
  on en déduit alors les variations de la fonction f . Les intervalles s'écriront à l'aide de la valeur de α trouvée dans la première partie .

La solution de la partie A

1) on a $g(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$

$\rightarrow \quad g'(x) = 3x^2 - 2x + 3$

on cherche les racines de g' $\rightarrow$ on utilise le discriminant Δ.

On obtient $\Delta = -28 < 0$ $\rightarrow$ il n'y a pas de racine et g' a un signe unique (positif ici !).

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

On calcule les limites en factorisant $g(x)$

$\rightarrow g(x) = x^3\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$

d'où les résultats.

2) c'est le corollaire du TVI !

La fonction est strictement croissante et continue sur $]-\infty\,;+\infty[$.

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

$\rightarrow$ Le nombre 0 appartient bien à l'intervalle image $]-\infty\,;+\infty[$.

Donc, d'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique dans l'intervalle $]-\infty\,;+\infty[$.

3) Avec la calculatrice, on applique la méthode classique pour trouver : $-0{,}30 < \alpha < -0{,}29$

4) En plaçant α dans le tableau de variations de la question 1, on en déduit le tableau de signes de g

x	$-\infty$		α		$+\infty$
variations de $g(x)$		$\boxed{-}$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $\boxed{+}$	

$\rightarrow$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
signes de $g(x)$		$-$	0	$+$	

La solution de la partie B

1) on a $f(x)=\dfrac{x^3+x-2}{x^2+1}$ → on utilise $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

On obtient $f'(x)=\dfrac{(3x^2+1)(x^2+1)-(x^3+x-2)\times 2x}{(x^2+1)^2}$

$$=\frac{3x^4+3x^2+x^2+1-2x^4-2x^2+4x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{x^4+2x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}$$

Et pour vérifier l'égalité proposée, on développe $(x+1)g(x)$

→ on a $(x+1)g(x)=(x+1)(x^3-x^2+3x+1)$

$$=x^4-\cancel{x^3}+3x^2+x+\cancel{x^3}-x^2+3x+1$$

$$=x^4+2x^2+4x+1$$

On a bien $f'(x)=\dfrac{(x+1)\,g(x)}{(x^2+1)^2}$

2) on obtient donc : pour $(x+1)$ pour $g(x)$

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x^2+1)^2$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

on trouverait $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

on trouverait $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$