Comment montrer que deux vecteurs sont orthogonaux : un exercice type

En dehors de certains raisonnements géométriques (par exemple, dans un cube, il y a des droites orthogonales, et donc des vecteurs orthogonaux), le ***principal outil*** pour montrer que des vecteurs sont orthogonaux sera d'utiliser, ***dans un repère orthonormé***, la formule du ***produit scalaire*** .

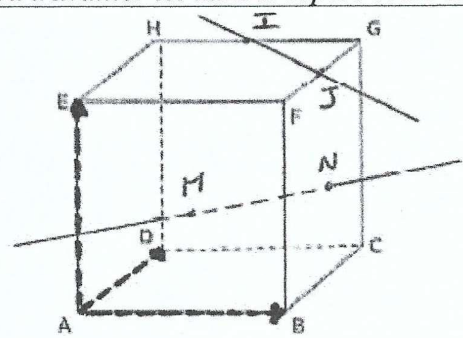
Définition et propriété (rappel)

Dans un repère orthonormé, le produit scalaire de $\vec{u}\ (x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}\ (x'\,;y'\,;z')$ sera égal à $\vec{u}\ .\ \vec{v}\ = x \times x' + y \times y' + z \times z'$
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ($\vec{u} \perp \vec{v}$) si et seulement si $\vec{u}\ .\ \vec{v}\ = 0$.

Application

Dans cet exemple, on va définir, nous mêmes, un repère orthonormé pour exprimer le produit scalaire.

→ *on va travailler ici dans le repère orthonormé* $(A\,,\ \overrightarrow{AB}\,,\ \overrightarrow{AD}\,,\ \overrightarrow{AE}\,)$



Le point I est au milieu du segment [HG]

Le point J est au milieu du segment [FG]

Le point M est au centre de la face ABFE

Le point N est au centre de la face BCGF

Montrer que les droites (I J) et (MN) sont orthogonales, c'est à dire (I J) ⊥ (MN) .

Etape 1 : on exprime, dans le repère choisi, les coordonnées de chacun des points I , J , M et N .

On a : $I \begin{vmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad J \begin{vmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 1 \end{vmatrix} \quad M \begin{vmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0,5 \end{vmatrix} \quad N \begin{vmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{vmatrix}$

Etape 2 : on calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{MN}$.

On obtient : $\overrightarrow{IJ} \begin{vmatrix} 1-0,5=0,5 \\ 0,5-1=-0,5 \\ 1-1=0 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{MN} \begin{vmatrix} 1-0,5=0,5 \\ 0,5-0=0,5 \\ 0,5-0,5=0 \end{vmatrix}$

Etape 3 : on calcule le produit scalaire $\overrightarrow{IJ}\,.\,\overrightarrow{MN}$ et on conclut.

On a donc $\overrightarrow{IJ} \begin{vmatrix} 0,5 \\ -0,5 \\ 0 \end{vmatrix} . \overrightarrow{MN} \begin{vmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{vmatrix} = 0,5 \times 0,5 + (-0,5) \times 0,5 + 0 \times 0$

On obtient $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{MN} = 0$ soit $\overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{MN}$ ou $(IJ) \perp (MN)$.