Comment calculer un produit scalaire dans l'espace
Utilisation pour montrer que des vecteurs sont orthogonaux

La formule pratique (valable dans un repère orthonormé)

C'est la même que celle vue en Première. Il faut juste l'étendre au fait d'avoir une troisième coordonnée z .

Avec deux vecteurs $\vec{u}$ de coordonnées $(x \,;\, y \,;\, z)$ et $\vec{v}$ de coordonnées $(x' \,;\, y' \,;\, z')$

On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = x \times x' + y \times y' + z \times z'$

Propriété fondamentale pour montrer que des vecteurs sont orthogonaux

Comme dans le plan , on aura la propriété suivante (propriété qui sera ***indispensable*** pour la suite) .

Si on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ alors on a $\vec{u} \perp \vec{v}$

Application directe

On considère les points suivants : A (1 ; 2 ; 3) ; B (3 ; 7 ; 9) et C (5 ; -2 ; 5).
On va montrer que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

Cela permettrait que montrer bien sûr que les droites (AB) et (AC) sont orthogonales ou, par exemple, que le triangle ABC est rectangle en A .

On a $\overrightarrow{AB} \left| \begin{array}{l} x_B - x_A = 3 - 1 = 2 \\ y_B - y_A = 7 - 2 = 5 \\ z_B - z_A = 9 - 3 = 6 \end{array} \right.$ et $\overrightarrow{AC} \left| \begin{array}{l} x_C - x_A = 5 - 1 = 4 \\ y_C - y_A = -2 - 2 = -4 \\ z_C - z_A = 5 - 3 = 2 \end{array} \right.$

On calcule alors $\overrightarrow{AB} \left| \begin{array}{c} 2 \\ 5 \\ 6 \end{array} \right. \cdot \overrightarrow{AC} \left| \begin{array}{c} 4 \\ -4 \\ 2 \end{array} \right.$

On obtient $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 4 + 5 \times (-4) + 6 \times 2$

$= 8 - 20 + 12 = 0$

<u>Conclusion</u> : on a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

Donc on a $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

Remarque sur le vocabulaire : perpendiculaire ou orthogonale

Si on sait que deux droites, ***dans l'espace***, vérifient le fait que $(d) \perp (d')$ alors :

- si les droites ***ne sont pas sécantes*** alors on dira qu'elles sont ***orthogonales***.
- si les droites ***sont sécantes*** alors on dira qu'elles sont ***perpendiculaires***.