Comment trouver la droite d'intersection entre deux plans

Dans un premier temps, on pourrait montrer que les deux plans sont bien *sécants*.
Ensuite, on pourra donc déterminer la *droite d'intersection*, en obtenant sa *représentation paramétrique*.

Attention, c'est assez technique et il faudra bien suivre la méthode proposée.
En effet, on va se retrouver avec un système de 2 équations à 3 inconnues.
Ce système ne pourra se résoudre que si une des coordonnées prend le rôle du paramètre k (on donne souvent ce rôle à la troisième coordonnée z).
Puis, en utilisant la méthode de la substitution, on résout le système en exprimant les deux autres coordonnées en fonction de ce paramètre.

Un exemple d'énoncé

On considère les plans $(P) : 2x+3y-z+2=0$ et $(Q) : x+y-2z+5=0$.
Déterminer l'équation de la droite d'intersection de ces deux plans.

La solution

Certains exercices demandent de vérifier au préalable que les plans (P) et (Q) sont bien sécants. On rappelle donc qu'il suffit de montrer que les vecteurs normaux (2 ; 3 ; - 1) et (1 ; 1 ; - 2) ne sont pas colinéaires. Ce qui est assez évident ici.

On résout le système $\begin{cases} 2x+3y-z+2=0 \\ x+y-2z+5=0 \end{cases}$

→ on fixe $z=k$ et on remplace donc z par la lettre k

On obtient $\begin{cases} 2x+3y-\boxed{k}+2=0 \\ x+y-\boxed{2k}+5=0 \\ z=k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x+3y=k-2 \\ x+y=2k-5 \\ z=k \end{cases}$

on a remplacé z par k

On obtient $\begin{cases} 2(-y+2k-5)+3y=k-2 \\ x=-y+2k-5 \\ z=k \end{cases}$ ← on a isolé x !

on a remplacé x par $-y+2k-5$

On obtient $\begin{cases} y=-3k+8 \\ x=-(-3k+8)+2k-5 \\ z=k \end{cases}$ soit $\begin{cases} x=\boxed{-13}\boxed{+5}k \\ y=\boxed{8}\boxed{-3}k \\ z=\boxed{0}\boxed{+1}k \end{cases}$

on a remplacé y par $-3k+8$

Un point — Un vecteur directeur

La droite d'intersection est donc la droite de vecteur directeur $(5;-3;1)$ et passant par le point $(-13;8;0)$.