Comment trouver l'équation cartésienne d'un plan : la méthode

Le principe de la méthode

On va voir ici une méthode qui utilise le vecteur normal.
→ on remplace les nombres a , b et c de l'équation du plan par les coordonnées de ce vecteur normal.
→ on trouve ensuite la valeur du nombre d , en utilisant l'appartenance d'un point à ce plan.

Comment retrouver l'équation cartésienne d'un plan

Cette question qui consiste à retouver l'équation cartésienne d'un plan se retrouve très souvent dans des exercices qui enchainent les trois questions ci-dessous.
Les méthodes pour répondre aux deux premières questions sont disponibles sur les fiches précédentes de ce chapitre. Et nous allons donc surtout détailler la méthode pour la question 3 .

Dans un repère orthonormé, on donne les points A (1 ; 1 ; 1) , B (3 ; 3 ; - 1) et C (- 1 ; 3 ; 2).
Question 1 : Montrer que les points A, B et C définissent un plan.
Question 2 : Montrer que le vecteur $\vec{n}$ (3 ; 1 ; 4) est un vecteur normal à ce plan (*ABC*).
Question 3 : En déduire une équation cartésienne du plan (*ABC*).

→ ***Question 1*** : Montrer que les points A, B et C définissent un plan.
On doit montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
On calcule donc les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *pour montrer qu'ils ne sont pas colinéaires.*

→ ***Question 2*** : Montrer que le vecteur $\vec{n}$ (3 ; 1 ; 4) est un vecteur normal à ce plan (ABC).
On doit montrer que $\vec{n}$ *est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC).*
Par exemple, on montre $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ *et* $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$ *en utilisant le produit scalaire.*

→ ***Question 3*** : En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
C'est la question qui nous intéresse tout particulièrement pour cette fiche.

* On sait que $\vec{n}\,(\underset{a}{3}\,;\underset{b}{1}\,;\underset{c}{4})$ est un vecteur normal au plan (ABC)

L'équation cartésienne de ce plan s'écrira alors :

$$\underset{a}{3}x + \underset{b}{1}y + \underset{c}{4}z + d = 0$$

* Il nous reste à déterminer la valeur de d.

On utilise, par exemple, que $A \in (ABC)$
et on remplace x, y et z par les coordonnées de A.

On obtient : $3 \times \underset{x_A}{1} + 1 \times \underset{y_A}{1} + 4 \times \underset{z_A}{1} + d = 0 \rightarrow 8 + d = 0$
$\rightarrow d = -8$

* L'équation cartésienne du plan (ABC) est donc :

$$3x + 1y + 4z - 8 = 0$$

ou $3x + y + 4z - 8 = 0$.