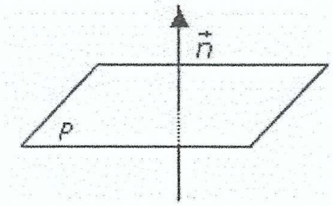
Vecteur normal : La définition et comment montrer qu'un vecteur est normal à un plan

Trouver un *vecteur normal* à un plan sera essentiel pour la suite. Cela permettra de déterminer les *positions relatives* d'un plan avec d'autres objets de l'espace ou d'obtenir l'*équation cartésienne* du plan.

Définition

Un vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal à un plan P s'il est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à ce plan (*le vecteur est alors "visuellement" orthogonal au plan*).



Propriété

Un vecteur $\vec{n}$ est ***normal*** à un plan P s'il est ***orthogonal à deux vecteurs non colinéaires*** de P.

Méthode à utiliser

Pour montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) , on vérifiera que $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (*on peut aussi raisonner avec* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BC}$ *ou bien encore avec* $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{BC}$).
On utilisera donc le ***produit scalaire*** (si on est bien dans un repère orthonormé), qui devra être égal à zéro afin de conclure que $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$.

Application

On considère les points A (0 ; 1 ; 0), B (1 ; 2 ; 2) et C (1 ; 0 ; 0) qui forment un plan (ABC).
On donne F (0 ; 0 ; 2) et D (2 ; 2 ; 0) et on va montrer que $\overrightarrow{FD}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Certains exercices demandent de vérifier que les points A, B et C forment bien un plan. On rappelle donc qu'il suffit de montrer que ces trois points A, B et C ne sont pas alignés !

On calcule $\overrightarrow{AB} \begin{vmatrix} 1-0=1 \\ 2-1=1 \\ 2-0=2 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{vmatrix} 1-0=1 \\ 0-1=-1 \\ 0-0=0 \end{vmatrix}$

on calcule aussi $\overrightarrow{FD} \begin{vmatrix} 2-0=2 \\ 2-0=2 \\ 0-2=-2 \end{vmatrix}$

On a donc $\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} = 2\times1 + 2\times1 + (-2)\times2 = \boxed{0}$

et $\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} = 2\times1 + 2\times(-1) + (-2)\times0 = \boxed{0}$

On a donc $\overrightarrow{FD} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FD} \perp \overrightarrow{AC}$

$\hookrightarrow$ $\overrightarrow{FD}$ est donc un vecteur normal au plan (ABC).