Comment montrer qu'une suite est géométrique : la méthode

La méthode vue ici va vous servir dans un nombre incroyable d'exercices. Il faut *la suivre avec soin*, en sachant qu'une fois la méthode bien mise en place, seuls les calculs pourront parfois poser des difficultés (n'hésitez pas à jeter un coup d'oeil sur les fiches de terminale).

La question à savoir résoudre

On donne $U_{n+1} = 0{,}75\ U_n + 20$ avec $U_0 = 30$.
On pose alors la suite auxiliaire définie par $V_n = U_n - 80$.
Montrons que la suite (V_n) est une suite géométrique.

La méthode pour montrer que la suite (V_n) est géométrique

→ on commence en faisant l'inventaire des **3 formules** que l'on va utiliser.

On a $U_{n+1} = 0{,}75\,U_n + 20$ → c'est la formule 1

On a $V_n = U_n - 80$ → c'est la formule 2

On obtient $U_n = V_n + 80$ → c'est la formule 3
(on a "inversé" la formule 2)

→ c'est la suite (V_n) qui doit être géométrique et **on va donc chercher à exprimer V_{n+1}**.

On obtient $V_{n+1} = U_{n+1} - 80$ (avec la formule 2)

→ $V_{n+1} = 0{,}75\,U_n + 20 - 80$ (avec la formule 1)

→ $V_{n+1} = 0{,}75(V_n + 80) + 20 - 80$ (avec la formule 3)

→ $V_{n+1} = 0{,}75\,V_n + \underbrace{0{,}75 \times 80 + 20 - 80}_{=0}$ (et ce n'est pas un hasard !)

On obtient donc $V_{n+1} = 0{,}75\,V_n$

Conclusion pour la suite (V_n)

(V_n) est une suite géométrique de raison 0,75 et de premier terme $V_0 = U_0 - 80 = 30 - 80 = -50$

On peut donc utiliser la formule des suites géométriques pour la suite (V_n)

On a : $V_n = V_0 \times q^{(n-0)}$ → $V_n = -50 \times 0{,}75^n$

On obtient donc la formule explicite pour la suite initiale (U_n)

On a : $U_n = V_n + 80$ (avec la formule 3)

→ $U_n = -50 \times 0{,}75^n + 80$