Définition d'un vecteur : caractéristiques d'un vecteur

Définition

Deux points A et B pris dans cet ordre vont définir un *vecteur* noté $\overrightarrow{AB}$.

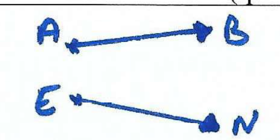
Ce vecteur $\overrightarrow{AB}$ correspond à un *déplacement* qui amène du point A au point B. On parlera également de *translation* qui transforme A en B. Le point A est ici le *point d'application* ou *point de départ*.

Dans la notation, la flèche du vecteur se note toujours de la même façon (de la gauche vers la droite).

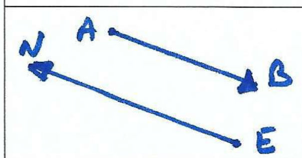
La caractérisation d'un vecteur

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ se définira avec trois caractéristiques :

- sa ***LONGUEUR*** (qui est la distance AB entre les deux extrémités)
- sa ***DIRECTION*** (qui est l'inclinaison du vecteur par rapport à l'horizontale)
- son ***SENS*** (qui est le sens de la flèche allant du point A au point B)



Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EN}$ ont le même sens, la même longueur MAIS PAS la même direction.



Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EN}$ ont la même direction MAIS PAS le même sens et la même longueur.

Vecteur nul

Le vecteur nul se note $\vec{0}$. Il correspond au fait de partir d'un point A et ... de rester sur ce point A.

On peut écrire $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{BB} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.

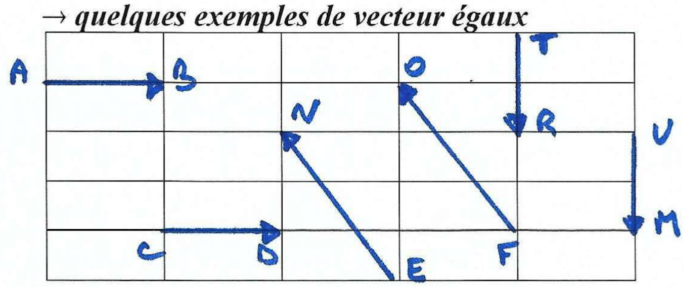
Vecteurs égaux

Deux vecteurs sont égaux si ils ont la ***même longueur****, la* ***même direction*** *et le* ***même sens***.

Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{RT}$ sont égaux, on le note tout simplement $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{RT}$.

Cela correspond au fait d'effectuer le même déplacement (ou la même translation) qui a amené A en B, en prenant cette fois le point R comme point de départ.

→ ***quelques exemples de vecteur égaux***



On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{FO}$

$\overrightarrow{TR} = \overrightarrow{UM}$

LE PRINCIPE FONDAMENTAL

Pour un vecteur donné, il existe une *infinité de vecteurs égaux*.
Il suffira de tracer le même vecteur en changeant de point d'application (ou point de départ).
Donc , à tout moment, dans les calculs ou dans les figures, on pourra changer un vecteur $\overrightarrow{AB}$ par un autre vecteur $\overrightarrow{RT}$ à condition qu'ils s'agissent bien de deux vecteurs égaux, c'est à dire si on a bien $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{RT}$!

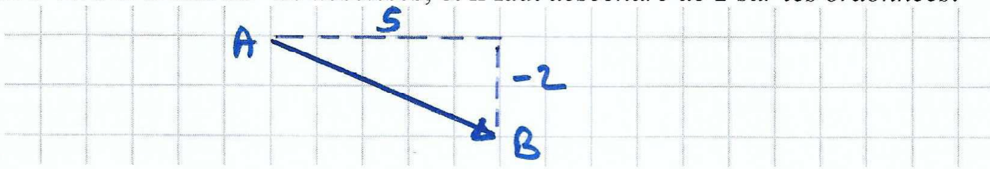
Comment calculer les coordonnées d'un vecteur

Dans n'importe quel repère, on pourra exprimer les *coordonnées d'un vecteur* en fonction des coordonnées des deux points qui forment ce vecteur.

La formule des coordonnées d'un vecteur

$$\text{avec } A\left|\begin{matrix}x_A\\y_A\end{matrix}\right. \text{ et } B\left|\begin{matrix}x_B\\y_B\end{matrix}\right. \text{, on aura } \overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{matrix}\right.$$

→ ces cordonnées sont un résumé du chemin qui permet de passer du point d'application à l'autre point. Par exemple , si les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont (5 ; - 2), cela signifie que pour aller du point A au point B, il faut aller de 5 *vers la droite sur les abscisses*, et il faut *descendre de 2 sur les ordonnées*.



On applique cette formule

$$\text{avec } A\left|\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\right. \text{ et } B\left|\begin{matrix}5\\10\end{matrix}\right. \text{, on a } \overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}x_B-x_A=5-3=2\\y_B-y_A=10-4=6\end{matrix}\right.$$

$$\text{avec } R\left|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right. \text{ et } T\left|\begin{matrix}3\\-4\end{matrix}\right. \text{, on a } \overrightarrow{RT}\left|\begin{matrix}x_T-x_R=3-(-1)=4\\y_T-y_R=-4-2=-6\end{matrix}\right.$$

$$\text{avec } E(7;-3) \text{ et } N(2;-1) \text{, on a } \overrightarrow{EN}\left|\begin{matrix}x_N-x_E=2-7=-5\\y_N-y_E=-1-(-3)=2\end{matrix}\right.$$

Comment montrer que des vecteurs sont égaux

D'une façon très évidente, on pourra montrer que deux vecteurs sont égaux *si et seulement si* les coordonnées de ces deux vecteurs sont égales.

Exemple : On considère les points A (1 ; 3) , B (5 ; 9) , C (- 2 ; 1) et D (2 ; 7).
Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

On a : $\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}x_B-x_A=5-1=4\\y_B-y_A=9-3=6\end{matrix}\right.$ soit $\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}4\\6\end{matrix}\right.$

On a : $\overrightarrow{CD}\left|\begin{matrix}x_D-x_C=2-(-2)=4\\y_D-y_C=7-1=6\end{matrix}\right.$ soit $\overrightarrow{CD}\left|\begin{matrix}4\\6\end{matrix}\right.$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont les mêmes coordonnées donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

Remarque

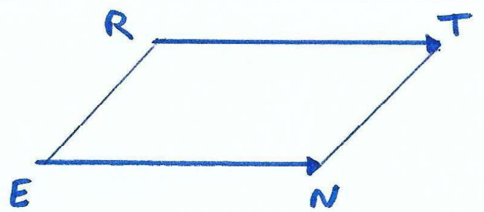
Il faut du coup bien comprendre que deux vecteurs peuvent donc avoir les mêmes coordonnées sans être visuellement au même endroit. C'est une sacré nouveauté par rapport aux coordonnées de points !

Vecteurs égaux et parallélogramme

Il faut rapidement comprendre le lien très fort qui existe entre le fait d'avoir des vecteurs égaux et le fait d'avoir un parallélogramme. Car ce lien va nous permettre de montrer très facilement qu'un quadrilatère est un parallélogramme.

Si on sait que des vecteurs sont égaux alors ....

Si les vecteurs $\overrightarrow{RT}$ et $\overrightarrow{EN}$ sont *égaux* alors le quadrilatère RTNE est un *parallélogramme*.

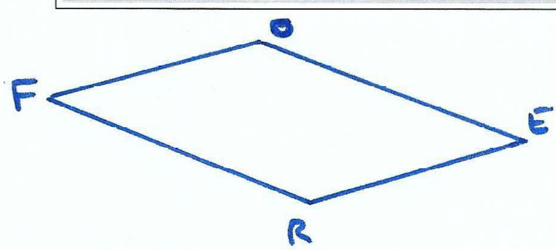


On a $\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{EN}$
Donc le quadrilatère RTNE
est un parallélogramme.

Attention !! On fera bien attention à l'ordre des lettres pour le parallélogramme !!
Si on a $\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{EN}$ *, alors le parallélogramme ne s'appelle pas RTEN !! Ce sera bien RTNE.*

Si on sait que l'on a un parallélogramme alors ....

Si on sait que FOER est un *parallélogramme* alors on peut en déduire *quatre égalités vectorielles*.



FOER est un parallélogramme
On a : $\overrightarrow{FO} = \overrightarrow{RE}$
et $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{ER}$
et $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{FR}$
et $\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{RF}$

Application fondamentale : comment montrer qu'on a un parallélogramme

A l'aide des coordonnées, on va pouvoir montrer que des ***vecteurs sont égaux entre eux***, et ainsi montrer que le quadrilatère est un ***parallélogramme***.

Exemple : On considère les points E (- 1 ; 3) , F (3 ; 7) , G (9 ; 2) et H (5 ; - 2).
Montrer que le quadrilatère FGHE est un parallèlogramme.
→ *attention à l'ordre des lettres ! Il faut montrer ici que* $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EH}$ *!!*

On a $\overrightarrow{FG} \left| \begin{array}{l} x_G - x_F = 9 - 3 = 6 \\ y_G - y_F = 2 - 7 = -5 \end{array} \right.$ et $\overrightarrow{EH} \left| \begin{array}{l} x_H - x_E = 5 - (-1) = 6 \\ y_H - y_E = -2 - 3 = -5 \end{array} \right.$

Les vecteurs $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{EH}$ ont les mêmes coordonnées.
Donc on a $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EH}$
Donc FGHE est un parallélogramme.

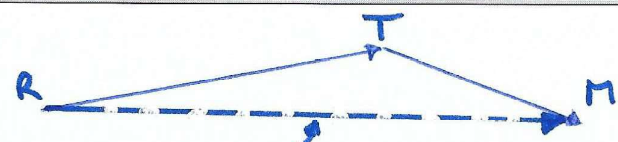
Comment faire la somme de deux vecteurs (1)
La propriété de Chasles

Une fois la notion de vecteur définie, on s'est intéressé, en mathématiques, à définir les opérations que l'on pouvait effectuer entre deux vecteurs.
On va voir ici comment faire l'***addition*** de deux vecteurs. Et la ***soustraction*** se déduira de *l'addition*, en prenant *l'opposé* du vecteur concerné (on aura, par exemple, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{RB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BR}$).
Par contre, la multiplication ou la division de deux vecteurs n'existe pas. Vou aurez juste, en première, un opérateur, ressemblant à la multiplication, qui s'appelle le produit scalaire.

La somme de deux vecteurs qui se suivent : la propriété de Chasles

C'est le premier cas d'addition vectorielle à maitriser car c'est la ***base de tout le reste*** !

On travaille avec ***deux vecteurs qui se suivent***, le deuxième vecteur ***commence sur le point d'arrivée*** du premier vecteur. On obtient une égalité vectorielle connue sous le nom de *PROPRIETE DE CHASLES*.

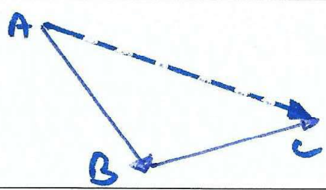


On a :
$\overrightarrow{RT} + \overrightarrow{TM} = \overrightarrow{RM}$

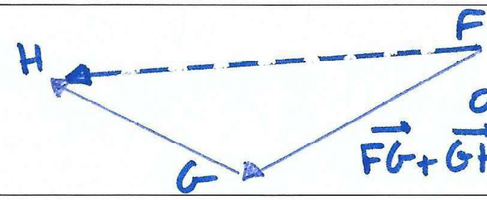
$\overrightarrow{RM}$ est le résultat de $\overrightarrow{RT} + \overrightarrow{TM}$

En faisant le lien avec des déplacements, c'est comme si on disait que le point T était un détour mais que finalement, dans les deux cas, on était parti du même point R pour arriver au même point M.

On illustre cette propriété avec deux exemples



On a :
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



On a :
$\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{FH}$

Utilisation de cette propriété de Chasles

Cette propriété va être essentielle pour le calcul vectoriel. Voici des exemples à parfaitement mémoriser.

On a : $\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TN}$ = ... (le point T va "*disparaitre*") soit $\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TN} = \overrightarrow{AN}$

On a : $\overrightarrow{BR} + \overrightarrow{RG}$ = ... (le point R va "*disparaitre*") soit $\overrightarrow{BR} + \overrightarrow{RG} = \overrightarrow{BG}$

On a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF}$ + ... (on peut "*introduire*" un point F) soit $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FC}$

On a : $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GA}$ + ... (on peut "*introduire*" un point A) soit $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AH}$

On a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$ = ... (il faut faire attention de bien remettre les vecteurs dans le bon ordre)
↳ on écrit $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$ et on a $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$

On a : $\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{BG}$ = ... (on change tout de suite la soustraction en une addition)
↳ on écrit $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}$ et on a $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{AB}$

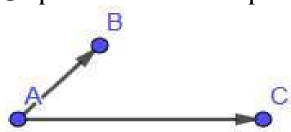
on a changé $-\overrightarrow{BG}$ en $+\overrightarrow{GB}$!

Comment faire la somme de deux vecteurs (2)
Les vecteurs partent du même point

Malheureusement pour nous, on ne pourra pas tout le temps appliquer la propriété de Chasles, car on n'aura pas toujours des vecteurs qui se suivent. On va voir dans cette fiche un deuxième cas possible.

La somme de deux vecteurs qui partent du même point

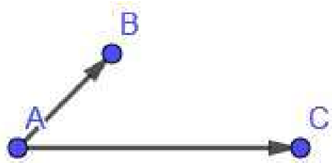
Voici un exemple pour lequel $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ partent du même point A.



Ecrire $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ **serait complètement FAUX !!**
La lettre A ne peut pas "disparaitre", les vecteurs ne se suivent pas, ce n'est pas la propriété de Chasles.

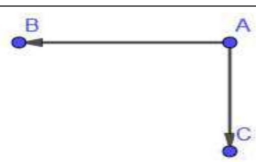
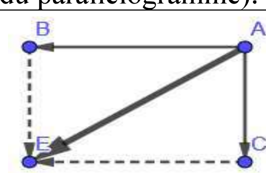
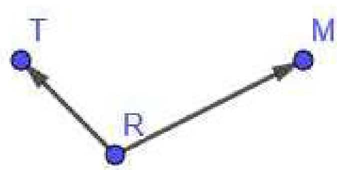
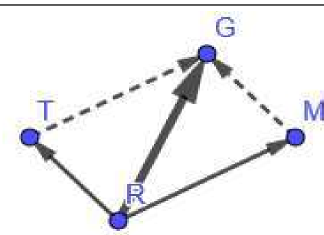
La méthode pour calculer la somme $\overrightarrow{AB}$ + $\overrightarrow{AC}$

Pour pouvoir appliquer la propriété de Chasles, on va "remplacer" le vecteur $\overrightarrow{AC}$ par un vecteur $\overrightarrow{BE}$ ***égal*** à $\overrightarrow{AC}$, vecteur qui partira du point B.
On se ramène alors au cas de deux vecteurs qui se suivent avec la propriété de Chasles !

	 On a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$	 On a donc : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ $= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$ $= \overrightarrow{AE}$ *soit* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$

Application

On parle souvent de la "***méthode du parallélogramme***" car c'est comme si l'on prenait la *diagonale du parallélogramme* qui se forme avec ces vecteurs. La particularité, par rapport à la propriété de Chasles, est l'apparition d'une $4^{\text{ième}}$ lettre dans ce calcul (c'est le $4^{\text{ième}}$ sommet du parallélogramme).

 Les vecteurs partent du même point A.	 On obtient $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$
 Les vecteurs partent du même point R.	 On obtient $\overrightarrow{RT} + \overrightarrow{RM} = \overrightarrow{RG}$

Comment faire la somme de deux vecteurs (3)
Avec des vecteurs quelconques

Dans ce cas, les deux vecteurs ne se suivent pas et ils ne partent pas du même point. C'est donc le cas général et la dernière possibilité à connaitre.

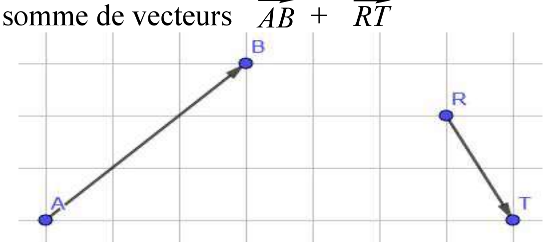
La méthode pour faire la somme de deux vecteurs quelconques

On veut calculer la somme suivante $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{RT}$ *(les vecteurs n'ont donc pas de point en commun !!)*

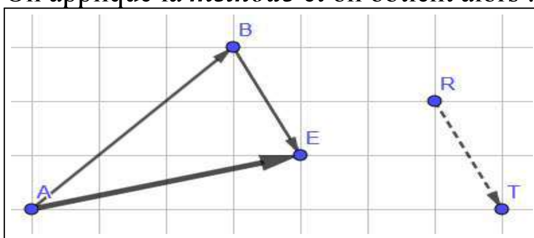
→ On remplace, par exemple, le vecteur $\overrightarrow{RT}$ par un vecteur égal à ce vecteur $\overrightarrow{RT}$.
On placera ce vecteur égal à $\overrightarrow{RT}$ sur le point B , qui est le point d'arrivée du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
On crée une nouvelle lettre (ici, E) et on se retrouve alors avec deux vecteurs qui se suivent.
On peut donc appliquer la propriété de Chasles avec ce nouveau vecteur $\overrightarrow{BE}$ **.**

→ On a $\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{BE}$ **.** On a donc : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{RT}$
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$
$= \overrightarrow{AE}$ (*en appliquant la propriété de Chasles*).

Exemple 1 : on veut faire la somme de vecteurs $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{RT}$



On applique la ***méthode*** et on obtient alors :

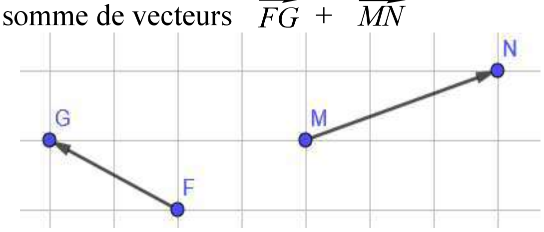


On a : $\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{BE}$

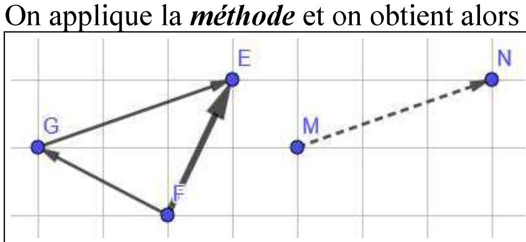
On obtient donc : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{RT}$
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$
$= \overrightarrow{AE}$

soit $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{RT} = \overrightarrow{AE}$

Exemple 2 : on veut faire la somme de vecteurs $\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{MN}$



On applique la ***méthode*** et on obtient alors :



On a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{GE}$

On obtient donc : $\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{MN}$
$= \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GE}$
$= \overrightarrow{FE}$

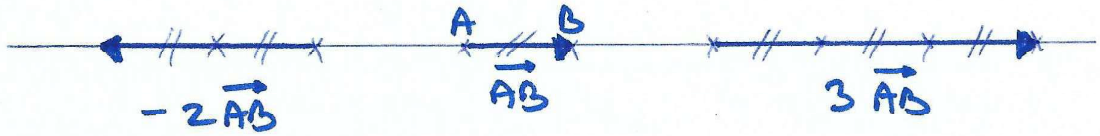
soit $\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{FE}$

Multiplier un vecteur par un nombre , longueur d'un vecteur

La multiplication d'un vecteur par un nombre réel

On peut multiplier un vecteur par un nombre (mais on ne pourra, par contre, jamais multiplier deux vecteurs entre eux).
Si on connait un vecteur $\vec{u}$, on pourra construire aisément le vecteur 2 $\vec{u}$, ou 3 $\vec{u}$, ou - 4 $\vec{u}$ ... etc ...

Le principe général est le suivant :
→ si le coefficient par lequel on multiplie $\vec{u}$ est ***positif***, alors on ira dans le ***même sens*** que $\vec{u}$.
→ si le coefficient par lequel on multiplie $\vec{u}$ est ***négatif***, alors on ira dans le ***sens opposé*** de $\vec{u}$.
→ et le vecteur 3 $\vec{u}$ sera ***trois fois*** plus grand que le vecteur $\vec{u}$.
→ et le vecteur - 2 $\vec{u}$ sera ***deux fois*** plus grand que le vecteur $\vec{u}$.



Les différents calculs utilisant les coordonnées de vecteurs

Ces règles de calculs sont très simples et intuitives. Il faut juste s'entrainer à les utiliser !

avec $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l}3\\4\end{array}\right.$, on a $2\overrightarrow{AB} = 2\times\left|\begin{array}{l}3\\4\end{array}\right. = \left|\begin{array}{l}2\times3\\2\times4\end{array}\right. = \left|\begin{array}{l}6\\8\end{array}\right.$ soit $2\overrightarrow{AB} = \left|\begin{array}{l}6\\8\end{array}\right.$

avec $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l}3\\4\end{array}\right.$, on a $-5\overrightarrow{AB} = -5\times\left|\begin{array}{l}3\\4\end{array}\right. = \left|\begin{array}{l}-5\times3\\-5\times4\end{array}\right. = \left|\begin{array}{l}-15\\-20\end{array}\right.$ soit $-5\overrightarrow{AB} = \left|\begin{array}{l}-15\\-20\end{array}\right.$

avec $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l}3\\4\end{array}\right.$ et $\overrightarrow{AC}\left|\begin{array}{l}2\\7\end{array}\right.$, on obtient $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} = \left|\begin{array}{l}3+2\\4+7\end{array}\right. = \left|\begin{array}{l}5\\11\end{array}\right.$

avec $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l}3\\4\end{array}\right.$ et $\overrightarrow{AC}\left|\begin{array}{l}2\\7\end{array}\right.$, on obtient :

$$6\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC} = 6\times\left|\begin{array}{l}3\\4\end{array}\right. - 5\times\left|\begin{array}{l}2\\7\end{array}\right. = \left|\begin{array}{l}6\times3-5\times2\\6\times4-5\times7\end{array}\right. = \left|\begin{array}{l}8\\-11\end{array}\right.$$

soit $6\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC} = \left|\begin{array}{l}8\\-11\end{array}\right.$

Calcul de la longueur d'un vecteur

La longueur d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ se calcule avec la même formule que la distance AB entre les deux points.

$$\text{Longueur du vecteur } \overrightarrow{AB} = AB = \sqrt{(Xb-Xa)^2+(Yb-Ya)^2}$$

Exemple : avec les points A (4 ; 5) et B (3 ; 8)

La longueur de $\overrightarrow{AB} = AB = \sqrt{(3-4)^2+(8-5)^2} = \sqrt{(-1)^2+(3)^2}$

on obtient : $AB = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

Comment retrouver les coordonnées d'un point : la méthode

C'est une vraie compétence à acquérir en seconde car, très souvent, il sera nécessaire d'utiliser une égalité vectorielle pour retrouver des coordonnées de points.

Le type d'énoncé que l'on va croiser

On connait les coordonnées des points A (2 ; - 6), B (3 ; - 1) et C (9 ; 4).
On veut retrouver les coordonnées d'un point M vérifiant l'égalité $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$.

La méthode

. On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$.
. Sachant que l'on doit avoir l'égalité $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$, cela signifie que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a les mêmes coordonnées que le vecteur $\overrightarrow{BC}$.
. On exprime alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction des coordonnées du point M (que l'on va noter x_M et de y_M).
. On se retrouve, alors, avec deux équations qu'il faudra juste résoudre : une équation pour trouver x_M et une autre équation pour trouver y_M .

On reprend maintenant notre énoncé

On connait les coordonnées des points A (2 ; - 6), B (3 ; - 1) et C (9 ; 4).
On veut retrouver les coordonnées d'un point M vérifiant l'égalité $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$.

On calcule $\overrightarrow{BC} \left| \begin{array}{l} x_C - x_B = 9 - 3 = 6 \\ y_C - y_B = 4 - (-1) = 5 \end{array} \right.$ soit $\overrightarrow{BC} \left| \begin{array}{l} 6 \\ 5 \end{array} \right.$

Avec $M \left| \begin{array}{l} x_M \\ y_M \end{array} \right.$, on obtient $\overrightarrow{AM} \left| \begin{array}{l} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{array} \right.$ soit $\overrightarrow{AM} \left| \begin{array}{l} x_M - 2 \\ y_M + 6 \end{array} \right.$

$\hookrightarrow y_M - (-6)$

On veut $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$ soit $\left\{ \begin{array}{l} x_M - 2 = 6 \\ y_M + 6 = 5 \end{array} \right.$

On résout les équations :

$x_M - 2 = 6 \rightarrow x_M = 6 + 2 \rightarrow x_M = 8$

$y_M + 6 = 5 \rightarrow y_M = 5 - 6 \rightarrow y_M = -1$

Les coordonnées du point M seront donc :

$M \left| \begin{array}{l} 8 \\ -1 \end{array} \right.$ ou $M(8 ; -1)$

Comment retrouver les coordonnées d'un point : une application

La question à savoir résoudre

On connait les coordonnées des points A (3 ; - 4), B (5 ; 1) et C (- 2 ; 0).
On veut retrouver les coordonnées d'un point M vérifiant l'égalité $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

La méthode

. On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.
. On calcule ensuite les coordonnées de $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
. Sachant que l'on doit avoir l'égalité $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$, cela signifie que le vecteur $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$ a les mêmes coordonnées que le résultat obtenu pour $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
. On exprime alors les coordonnées de $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$ en fonction de x_M et de y_M, et il nous reste à résoudre deux équations : une équation pour trouver x_M et une autre équation pour trouver y_M .

On reprend maintenant notre énoncé

On connait les coordonnées des points A (3 ; - 4), B (5 ; 1) et C (- 2 ; 0).
On veut retrouver les coordonnées d'un point M vérifiant l'égalité $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

* On a $\overrightarrow{AB} \left| \begin{array}{l} x_B - x_A = 5-3 = 2 \\ y_B - y_A = 1-(-4) = 5 \end{array} \right.$ et $\overrightarrow{AC} \left| \begin{array}{l} x_C - x_A = -2-3 = -5 \\ y_C - y_A = 0-(-4) = 4 \end{array} \right.$

On obtient $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = 2\times \left| \begin{array}{l} 2 \\ 5 \end{array} \right. - 3\times \left| \begin{array}{l} -5 \\ 4 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} 2\times 2 - 3\times(-5) = 19 \\ 2\times 5 - 3\times 4 = -2 \end{array} \right.$

* On a $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \left| \begin{array}{l} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{array} \right. + \left| \begin{array}{l} x_M - x_B \\ y_M - y_B \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} x_M - 3 \\ y_M - (-4) \end{array} \right. + \left| \begin{array}{l} x_M - 5 \\ y_M - 1 \end{array} \right.$

On obtient $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \left| \begin{array}{l} x_M - 3 + x_M - 5 = 2x_M - 8 \\ y_M + 4 + y_M - 1 = 2y_M + 3 \end{array} \right.$

* On veut $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ soit $\begin{cases} 2x_M - 8 = 19 \\ 2y_M + 3 = -2 \end{cases}$

On résout les équations :

$2x_M - 8 = 19 \rightarrow 2x_M = 27 \rightarrow x_M = 27/2 = 13,5$

$2y_M + 3 = -2 \rightarrow 2y_M = -5 \rightarrow y_M = -5/2 = -2,5$

Les coordonnées du point M seront donc :

$M \left| \begin{array}{l} 27/2 \\ -5/2 \end{array} \right.$ ou $M\left(\frac{27}{2} ; -\frac{5}{2}\right)$

Comment déterminer les coordonnées d'un point pour obtenir un parallélograme

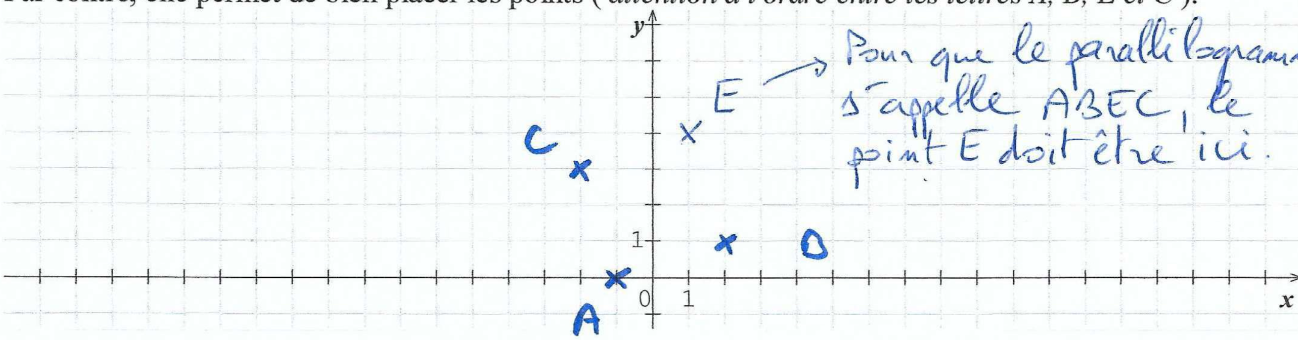
On peut remarquer que l'on a déjà appris, cette année, à résoudre cette question en utilisant la formule du milieu d'un segment, et le fait que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.
Nous allons donc voir ici une autre méthode. En sachant que c'est justement cette méthode avec les vecteurs qui sera la plus rapide et la plus efficace à terme !

La question à savoir résoudre

On donne A (- 1 ; 0), B (2 ; 1) et C (- 2 ; 3).
Déterminer les coordonnées du point E tel que ABEC soit un parallélogramme

Un dessin pour s'aider

On va placer les points, pour s'aider à construire le raisonnement mais certainement pas pour conclure !
En classe de Seconde, une figure ne sera jamais une preuve !!
Par contre, elle permet de bien placer les points (*attention à l'ordre entre les lettres A, B, E et C*).



La résolution du problème

On veut ABEC parallélogramme soit, par exemple, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$.

On a $\overrightarrow{AB} \left| \begin{array}{l} x_B - x_A = 2-(-1) = 3 \\ y_B - y_A = 1 - 0 = 1 \end{array} \right.$ soit $\overrightarrow{AB} \left| \begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array} \right.$

Avec $E \left| \begin{array}{l} x_E \\ y_E \end{array} \right.$, on a $\overrightarrow{CE} \left| \begin{array}{l} x_E - x_C = x_E - (-2) \\ y_E - y_C = y_E - 3 \end{array} \right.$ soit $\overrightarrow{CE} \left| \begin{array}{l} x_E + 2 \\ y_E - 3 \end{array} \right.$

On veut $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$ soit $\left\{ \begin{array}{l} x_E + 2 = 3 \\ y_E - 3 = 1 \end{array} \right.$

On résout les équations :

$x_E + 2 = 3 \rightarrow x_E = 3 - 2 \rightarrow x_E = 1$

$y_E - 3 = 1 \rightarrow y_E = 1 + 3 \rightarrow y_E = 4$

Les coordonnées du point E seront donc :

$E \left| \begin{array}{l} 1 \\ 4 \end{array} \right.$ ou $E(1 ; 4)$ et cela est vérifié sur le dessin !!