Les exercices : vecteurs colinéaires et travail sans coordonnées

Exercice 1

ABCD est un parallélogramme.

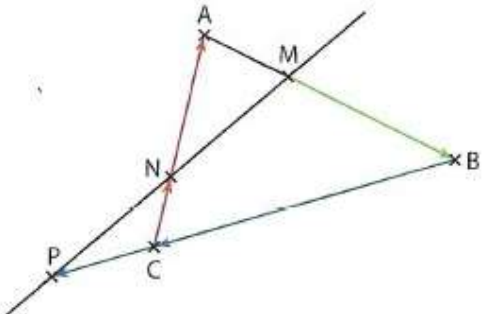
Les points E et F sont tels que $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$

1) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

2) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires. Que peut-on affirmer alors pour les droites (CE) et (BF) ?

Exercice 2

A, B et C sont trois points non alignés. On considère les points M, N et P tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. On obtient le dessin suivant :

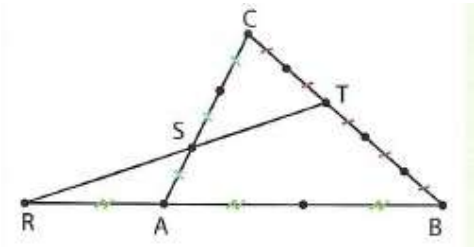


1) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont colinéaires. Que peut-on affirmer alors pour les points M, N et P ?

Exercice 3

On considère la figure suivante (mais *attention de ne pas dire que les points R,S et T sont alignés parce qu'on le voit ... un dessin n'est pas une preuve , c'est juste une indication ...*).



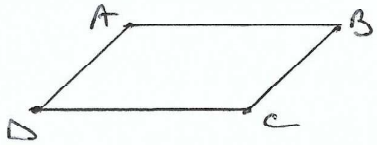
1) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$ sont colinéaires. Que peut-on affirmer alors pour les points R, S et T ?

→ voici les réponses !!

Exercice 1

ABCD est un parallélogramme → cela nous donne beaucoup d'égalités vectorielles !



1) pour $\overrightarrow{CE}$, on introduit le point B avec la propriété de Chasles car on pourra faire le lien avec l'énoncé qui nous donne $\overrightarrow{BE}$.

avec l'énoncé.

On a : $\underset{\underset{B}{\wedge}}{\overrightarrow{CE}} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

avec le parallélogramme

$\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD}$

pour $\overrightarrow{BF}$, on introduit D pour utiliser $\overrightarrow{DF}$.

On a : $\underset{\underset{D}{\wedge}}{\overrightarrow{BF}} = \underset{\underset{A}{\wedge}}{\overrightarrow{BD}} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}$

$= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$

on utilise à nouveau "Chasles"

$= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

$= -\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AD}$.

2) On a $\overrightarrow{CE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

et $\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AD}$

On divise les coefficients respectifs et on obtient :

$-1 : 3/4 = -\frac{4}{3}$ et $4/3 : -1 = -\frac{4}{3}$

On a donc $\overrightarrow{BF} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{CE}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires

Donc les droites (BF) et (CE) sont parallèles.

Exercice 2

1) pour $\overrightarrow{MN}$, on introduit le point A avec la propriété de Chasles pour utiliser l'énoncé avec $\overrightarrow{AM}$.

on a : $\underset{A}{\overrightarrow{MN}} = \overrightarrow{MA} + \underset{C}{\overrightarrow{AN}}$ on utilise à nouveau "Chasles" pour $\overrightarrow{AN}$.

$= -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$

$= -\underbrace{\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}}_{\text{avec l'énoncé}} + \overrightarrow{AC} + \underbrace{\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}}_{\text{avec l'énoncé}}$

soit $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

pour $\overrightarrow{MP}$, on introduit le point N puis le point C pour utiliser l'énoncé avec $\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{CN}$.

on a : $\underset{N}{\overrightarrow{MP}} = \overrightarrow{MN} + \underset{C}{\overrightarrow{NP}} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CP}$

$= \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{CP}$

$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \underbrace{\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}}_{\overrightarrow{CN}} + \underbrace{\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}}_{\overrightarrow{CP}}$

soit $\overrightarrow{MP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

car $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \underbrace{\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}}_{\text{ou } -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

soit $\overrightarrow{MP} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

2) on a : $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

et $\overrightarrow{MP} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

on peut voir que $\overrightarrow{MP} = 2\,\overrightarrow{MN}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires

Donc les points M, N et P sont alignés.

Exercice 3

1) on a $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AS}$

$\hat{A}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Avec le dessin, on voit bien que $\overrightarrow{RA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

on a $\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{BT}$

$\hat{B}$

$= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$

car on a $\overrightarrow{RB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BT} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$

$= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

$= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{9}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

$\frac{3}{2} - \frac{3}{5} = \frac{9}{10}$!

2) on a : $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

et $\overrightarrow{RT} = \frac{9}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

on divise les coefficients respectifs et on obtient :

$\frac{9}{10} : \frac{1}{2} = \frac{9}{5}$ et $\frac{3}{5} : \frac{1}{3} = \frac{9}{5}$

on a donc $\overrightarrow{RT} = \frac{9}{5}\overrightarrow{RS}$

Les vecteurs $\overrightarrow{RT}$ et $\overrightarrow{RS}$ sont colinéaires.

Donc les points R, T et S sont alignés.